

## Algebra und Zahlentheorie.

**Dieudonné, J.:** Sur les zéros des polynômes-sections de  $e^x$ . (59. sess., Nantes, 22.—27. VII. 1935.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 132—135 (1935).

Cf. Bull. Sci. math., II. s. 59, 333 (this Zbl. 13, 101). *G. Szegő* (St. Louis, Mo.).

**Neuhaus, F. W.:** Seltenheit der reduziblen Polynome. Deutsche Math. 1, 512 bis 518 (1936).

Während K. Siegel (Abh. preuß. Akad. Wiss. 1930, Nr 1) ein Kriterium aufstellte dafür, daß eine Gleichung  $f(t, z) = 0$  für unendlich viele ganzzahlige Werte  $t^*$  von  $t$  im gegebenen Zahlkörper  $K$  reduzibel ist, wobei dieses Kriterium mit den inneren Eigenschaften des Funktionenkörpers  $K(t, z)$  verbunden ist ( $K(t, z)$  muß dazu jedenfalls vom Geschlecht 0 sein), findet der Verf. einige neue Kriterien, die aus der speziellen Gestalt der Gleichung  $f(t, z) = 0$  folgen. Dabei knüpft er seine Untersuchungen an die Arbeiten von K. Runge [J. reine angew. Math. 100 (1886)] und K. Dörge [Math. Ann. 102 (1929)] an. Der Satz von Runge besagt: Ist  $f(t, z) = Z^n + a_1(t)z^{n-1} + \dots + a_n(t)$ , wobei die  $a_i(t)$  ganzzahlige Polynome sind, und hat die Entwicklung von  $z$  um  $t = \infty$  mehr als einen Wurzelzyklus, so besitzt  $f(t^*, z)$  nur für endlich viele ganzzahlige  $t^*$  einen Linearfaktor. — Dörge betrachtet den Fall, wo  $a_n(t) = \text{konst.}$  ist. Dann kann  $f(t^*, z)$  nur dann für unendlich viele  $t^*$  einen Faktor  $q$ -ten Grades abspalten, wenn es  $f(t, z) = 0$   $q$  Wurzeln  $z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, \dots, z_{\alpha_q}$  mit  $z_{\alpha_1} \cdot z_{\alpha_2} \cdot \dots \cdot z_{\alpha_q} = \text{konst.}$  besitzt. — Der Verf. nimmt an,  $a_n(t)$  enthalte die höchste in  $f(t, z)$  vorkommende Potenz von  $t$  nicht, und  $f(t, z) = 0$  besitze in  $K(t)$  die symmetrische oder die alternierende Galoissche Gruppe. Dann ist  $f(t^*, z)$  nur für endlich viele ganzzahlige Werte  $t^*$  von  $t$  reduzibel.

*N. Tschebotarow* (Kasan).

**Neuhaus, F. W.:** Seltenheit der Gleichungen mit Affekt. Deutsche Math. 1, 519—524 (1936).

Verf. beweist folgende Sätze: I. Es sei

$$f_v(x, a_\mu, t) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_\mu x^{n-\mu} + \dots + t x^{n-\nu} + \dots + a_n = 0$$

eine Gleichung, deren Koeffizienten, mit Ausnahme von  $a_\mu$  und  $a_\nu = t$ , feste ganze rationale Zahlen sind. Ist  $\mu$  zu  $n$  relativ prim, so ist diese Gleichung nur für endlich viele ganze rationale Werte  $a_\mu^*$  von  $a_\mu$  im Körper  $K(t)$  mit Affekt. — II. Ist dabei  $\nu = n$ ,  $\mu$  zu  $n-1$  relativ prim und  $a_{n-1} \neq 0$ , so ist diese Gleichung nur für endlich viele  $a_\mu = a_\mu^*$  mit Affekt. — Bemerkenswert ist folgender beim Beweisen angewandter gruppentheoretischer Hilfssatz: Besitzt eine transitive Substitutionsgruppe  $n$ -ten Grades eine aus einem  $\nu$ -gliedrigen und einem  $(n-\nu)$ -gliedrigen Zyklus bestehende Substitution, so ist sie primitiv, falls  $\nu$  zu  $n$  relativ prim ist. *N. Tschebotarow*.

**Gantmacher, F.:** La théorie géométrique des diviseurs élémentaires d'après M. Krull. Trav. Univ. Odessa, Math. 1, 89—108 u. franz. Zusammenfassung 108 (1935) [Russisch].

The author follows the ideas of Krull's papers on Abelian groups [Math. Z. 23, 182—187 (1925); S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1926] and develops, in a geometrical language, the theory of elementary divisors for an arbitrary number field. With the aid of some simple geometrical concepts he establishes the fundamental theorems for a decomposition of vector space into cyclic subspaces, which enable him to obtain easily the canonical forms for a matrix, and some other well-known results of matrix theory. — For other closely related work see: M. H. Ingraham, Bull. Amer. Math. Soc. 39, 379—382 (1933), this Zbl. 7, 51; M. H. Ingraham and M. C. Wolf, Ibid. 42, 493 (1936) and N. Jacobson, Proc. Nat. Acad. Sci. 21, 667—670 (1935), this Zbl. 13, 146.

*I. S. Sokolnikoff* (Madison).



**Fort, Tomlinson:** Formulas for reducing a quadratic form to a sum of squares. Amer. Math. Monthly **43**, 477—481 (1936).

A theorem of Sylvester on determinants and the elementary device of completing the square leads to simple explicit formulas for transforming a definite quadratic form to a sum of squares. *Auszug.*

**Rados, Gustav:** Ein neuer Beweis für den Sylvesterschen Determinantensatz. Mat. természett. Értes. **54**, 677—682 u. deutsch. Zusammenfassung 683—684 (1936) [Ungarisch].

**Krull, Wolfgang:** Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche. Math. Z. **41**, 545—577 (1936).

The present paper applies the theory of general non-Archimedean evaluations and the corresponding evaluation rings (e. r.) previously discussed by the author (this Zbl. **4**, 98) to the arithmetic of arbitrary integrally closed domains of integrity  $\mathfrak{J}$ . The result that  $\mathfrak{J}$  is the intersection  $\bigcap \mathfrak{B}_\tau$  of all e. r.'s  $\mathfrak{B}_\tau$  where  $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{B}_\tau \supset \mathfrak{J}$  and  $\mathfrak{R}$  is the quotient field of  $\mathfrak{J}$ , and the simple arithmetic of  $\mathfrak{B}_\tau$  are used to prove theorems about  $\mathfrak{J}$ . For example, Kronecker's theorem for polynomials with coefficients in  $\mathfrak{J}$  is proved in this way. The main concern of the paper is the investigation of extension ideals  $a'$  of  $a$  (any fractional ideal), or of 'operations such that (1)  $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}$ , (2)  $a' \supseteq a$ ;  $a \supseteq b$  implies  $a' \supseteq b'$ , (3)  $(a')' = a'$ , (4)  $(a + b)' = (a' + b')$ , (5)  $(ab)' = (a'b')$ , (6)  $(a' \cap b')' = a' \cap b'$ , (7)  $(a)' = (a)$ ;  $(a)a' = (a)a'$ . If  $(a'b')' \subseteq (a'c')$  for a finite  $a$  implies that  $b' \subseteq c'$ , the 'operation is called arithmetically useful (a. u.). Such an operation defines a functional ring  $\tilde{\mathfrak{M}}$  as the set of rational functions  $\alpha = \frac{(a_0 x^m + \dots + a_m)}{(b_0 x^n + \dots + b_n)}$ ,  $a_i, b_i \in \mathfrak{R}$  such that  $(a_0, \dots, a_m)' \subseteq (b_0, \dots, b_n)'$ .  $\tilde{\mathfrak{M}} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{J}$  and every finite ideal in  $\tilde{\mathfrak{M}}$  is principal. Any a. u. 'operation is shown to be equivalent, i. e. has the same functional ring as a  $w$ -operation defined by  $\alpha_w = \bigcap \mathfrak{B}_\sigma$  where  $\{\mathfrak{B}_\sigma\}$  is a set of e. r.'s for which  $\bigcap \mathfrak{B}_\sigma = \mathfrak{J}$ . If this is the complete set of e. r.'s containing  $\mathfrak{J}$  the corresponding operation  $b$  is equivalent to the integral closure  $a$  of  $a$  as defined by Prüfer (this Zbl. **4**, 340) and the corresponding functional ring  $\tilde{\mathfrak{M}}$  is contained in all  $\tilde{\mathfrak{M}}'$ . The latter may be obtained also as quotient rings in the sense of Grell (Math. Ann. **97**, 490—523) of  $\tilde{\mathfrak{M}}$ . If the van der Waerden-Artin closure  $\alpha_v = (\alpha^{-1})^{-1}$  is a. u. its  $\tilde{\mathfrak{M}}_v$  contains all other  $\tilde{\mathfrak{M}}'$ . These results also indicate the nature of the problem of determining all e. r.'s  $\mathfrak{B}_\tau \supset \mathfrak{J}$ . For since  $\tilde{\mathfrak{M}}$  is a multiplication ring (every finite ideal reversible) its e. r.'s are the rings  $\tilde{\mathfrak{M}}_p$ , the sets  $\alpha/\beta$  where  $\alpha, \beta \in \tilde{\mathfrak{M}}$  and  $\beta \notin p$  a prime ideal in  $\tilde{\mathfrak{M}}$ . Furthermore there is a (1—1) correspondence between these e. r.'s and those containing  $\mathfrak{J}$ . Equivalence of 'operations does not imply identity. The question whether the particular operations  $a$  and  $b$  are the same is investigated and a partial answer obtained. Other methods of obtaining a. u. operations and also the theory in the special case of rings satisfying the divisor chain condition are discussed. *Jacobson.*

**Schilling, Otto F. G.:** Einheitentheorie in rationalen hyperkomplexen Systemen. J. reine angew. Math. **175**, 246—251 (1936).

Ist  $\mathfrak{M}$  eine maximale Ordnung einer einfachen Algebra  $A$  über einem endlichen algebraischen Zahlkörper  $k$  und  $\mathfrak{D}$  eine Teilordnung von  $\mathfrak{M}$  von demselben Rang, so bildet die Einheitengruppe  $\mathfrak{E}_{\mathfrak{D}}$  von  $\mathfrak{D}$  eine Untergruppe der Einheitengruppe  $\mathfrak{E}_{\mathfrak{M}}$  von  $\mathfrak{M}$  von endlichem Index. Ist  $A$  eine volle Matrizenalgebra über  $k$ , so besitzt  $\mathfrak{E}_{\mathfrak{M}}$  ein endliches System von Erzeugenden; im allgemeinen Fall ist  $\mathfrak{E}_{\mathfrak{M}}$  jedenfalls in einer Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden enthalten. Im Fall einer Divisionsalgebra wird gezeigt, daß die maximalen kommutativen Untergruppen von  $\mathfrak{E}_{\mathfrak{D}}$  Einheitsgruppen von kommutativen Teilkörpern  $L$  von  $A$  sind. Dabei ist  $L$  entweder selbst Zerfällungskörper von  $A$  oder in Zerfällungskörpern  $K$  vom Relativgrad 2 über  $L$  enthalten und dann  $L$  total reell und  $K$  total imaginär. *R. Brauer (Toronto).*



## Zahlentheorie:

Venkatarayudu, T.: On the significance and the extension of the Chinese remainder theorem. J. Indian Math. Soc., N. s. 2, 99—110 (1936).

Das Problem, eine Zahl  $x$  zu finden, die den sämtlichen Kongruenzen  $x \equiv m_i \pmod{M_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $m_i, M_i$  ganze Zahlen, genügt, wird mit Hilfe des direkten Produktes der Restklassenringe der ganzen Zahlen mod  $M_i$  behandelt, wobei zugleich der Basissatz für endliche Abelsche Gruppen mitbewiesen wird. *Magnus.*

Lehmer, D. H.: Polynomials for the  $n$ -ary composition of numerical functions. Amer. J. Math. 58, 563—572 (1936).

The function  $\Psi(x_1, x_2) = -a + a(x_1 + x_2) + (1-a)x_1x_2$  where  $a$  is an integer  $\leq 1$  is the most general polynomial in two variables satisfying the following postulates  $A, B, C$ ; and every polynomial  $\Psi(x_1, \dots, x_n)$  satisfying  $A, B, C$  is given by

$$(a^n - a)/(1-a) + a^{n-1} \sum x_i + (1-a)a^{n-2} \sum x_i x_j + (1-a)^2 a^{n-3} \sum x_i x_j x_k + \dots + (1-a)^{n-1} x_1 x_2 \dots x_n,$$

which is obtained by iterating  $\Psi(x_1, x_2)$   $n-2$  times. The postulates are: A. If each  $x_i$  is a positive integer,  $\Psi(x_1, \dots, x_n)$  is a positive integer. B.  $\Psi(x_1, \dots, x_n) = N$  is solvable in positive integers for any positive integer  $N$ . C. The iterate  $\Psi^*(x_1, \dots, x_{2n-1}) = \Psi(x_1, \dots, x_{n-1}, \Psi(x_n, \dots, x_{2n-1}))$  is a symmetric function of  $x_1, \dots, x_{2n-1}$ . — It is shown that  $C$  implies that  $\Psi$  is symmetric and linear in each  $x_i$ . The most general  $\Psi$  for which  $\Psi^*$  is symmetric is found. It is observed to be expressible as a product of linear factors  $ax_i + b$  after a slight transformation, and to be obtainable by  $n-2$  iterations of a like polynomial in two variables. The most general symmetric multilinear form satisfying  $A$  and  $B$  is seen to be

$$1 + \sum (x_i - 1) + c_2 \sum (x_i - 1)(x_j - 1) + \dots + c_n (x_1 - 1)(x_2 - 1) \dots (x_n - 1),$$

with non-negative integers  $c_i$ . The first result stated above follows. Obvious applications of the theory are in generalizing the theory of composition of numerical functions. *G. Pall (Montreal).*

Lehmer, D. H.: An extension of the table of Bernoulli numbers. Duke math. J. 2, 460—464 (1936).

Für die Fortsetzung der von H. S. Vandiver (dies. Zbl. 3, 150; 5, 344) angefangenen Untersuchungen über den großen Fermatschen Satz war es nötig, die Tabelle der berechneten Bernoullischen Zahlen weiter auszudehnen. Verf. hat sich zu diesem Zwecke aus den bekannten Berechnungsmethoden als geeignetste diejenige ausgewählt, in welcher die durch die Beziehung  $G_n = (2 - 2^{n+1})B_n$  mit den Bernoullischen Zahlen verbundenen Genocchischen Zahlen auftreten:  $4G_{2n} + 3 \sum_{\lambda} G_{2n-6\lambda} \binom{2n}{6\lambda} = 2n$  oder  $-4n$ .

Diese hat den Vorteil, daß die gesuchten Zähler der Bernoullischen Zahlen am Ende der Berechnung als Quotient zweier großen ganzen Zahlen gefunden werden, wobei das Aufgehen der Teilung dann eine Probe für die Richtigkeit der ganzen Berechnung ist. Eine Tabelle der Zähler und Nenner von  $B_{91}$  bis  $B_{110}$  ist beigelegt. Ref. hat die Zähler nachgeprüft durch die Kongruenz:  $B_n \equiv 0 \pmod{p}$ , wenn  $n \equiv 0 \pmod{p}$  und  $n \not\equiv 0 \pmod{p-1}$ .  $D_{94}$  (S. 464) muß 30 statt 6 sein. *N. G. W. H. Beeger.*

Moessner, Alfred: Simultane Identitäten. Bull. Calcutta Math. Soc. 28, 57—60 (1936).

Nagell, Trygve: Über die Lösbarkeit gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades. Comment. math. helv. 9, 31—39 (1936).

Verf. zeigt folgende Sätze: 1. Sei  $\Omega$  ein Körper,  $B$  eine Zahl hieraus, die weder die Form  $27\alpha^6$  noch die Form  $-16\alpha^6$  hat, wo  $\alpha$  in  $\Omega$  liegt. Wenn die Gleichung  $x^3 - B = y^2$  in Zahlen aus  $\Omega$  mit  $xy \neq 0$  unlösbar ist, so ist sie noch immer unlösbar nach Adjunktion von  $\sqrt{-3}$ . — 2. Sei  $A > 2$  eine natürliche kubusfreie Zahl. Ist  $x^3 + y^3 = A$  in  $\Omega$  unlösbar, so auch noch nach Adjunktion von  $\sqrt{-3}$ ; dabei wird



von Lösungen mit  $x^3 = y^3$  abgesehen. — 3. In  $\Omega$  sei die Zahl  $\cos(2\pi/9)$  nicht enthalten; die Gleichung  $x^3 - 2^4 3^3 = y^2$  habe an Lösungen aus  $\Omega$  mit  $xy \neq 0$  nur  $x = 12$ ,  $y = \mp 36$ . Nach Adjunktion von  $\sqrt{-3}$  gibt es höchstens die Lösungen  $x^3 = 12^3$ ,  $y = \mp 36$ . — 4. Enthält  $\Omega$  die Zahl  $\cos(2\pi/9)$  nicht und ist hierin die Gleichung  $x^3 + y^3 = 1$  mit  $xy \neq 0$  unlösbar, so auch noch nach Adjunktion von  $\sqrt{-3}$ . — Zum Beweis wird 2. auf 1. und 4. auf 3. birational zurückgeführt. Um dann z. B. Satz 1 zu zeigen, kann man annehmen, daß  $x^3 - B = x^2$  nicht in  $\Omega$ , wohl aber in  $\Omega(\sqrt{-3})$  mit  $xy \neq 0$  lösbar ist; dabei kann dann  $\sqrt{-3}$  nicht in  $\Omega$  liegen. Eine Diskussion zeigt, daß  $y$  nicht in  $\Omega$  liegen kann, und nach einigen Fallunterscheidungen kommt man zu dem Ergebnis, daß  $x_1^3 - 27B = y_1^2$  mit  $x_1 y_1 \neq 0$  in  $\Omega$  lösbar ist; aus jeder solchen Lösung würde sich aber durch eine einfache Transformation eine von  $x^3 - B = y^3$ ,  $xy \neq 0$  ergeben, d. h. ein Widerspruch. Ähnlich zeigt man 3. *Mahler* (Krefeld).

**Skolem, Th.: Einige Betrachtungen zur additiven Zahlentheorie.** Norsk Mat. Tidsskr. 17, 97—121 (1935) [Norwegisch].

The author gives an exposition of proofs of theorems on the number of partitions of integers in two square-free addends. The proofs are based on the following elimination principle: Let  $M_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , denote a finite set of finite sets and  $M_{ijh\dots}$  denote the cross-cut of  $M_i$ ,  $M_j$ ,  $M_h, \dots$ . Let  $N_{ijh\dots}$  be the number of elements in  $M_{ijh\dots}$ . Then

$$N \leq \sum_i N_i, \quad N \geq \sum_i N_i - \sum_{i,j} N_{ij}, \dots,$$

$$N = \sum_i N_i - \sum_{i,j} N_{ij} + \dots \pm \sum_{i,j,h,\dots} N_{ijh\dots}.$$

*Engström* (New Haven).

**Chowla, S.: Pillai's exact formulae for the number  $g(n)$  in Waring's problem.** Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 4, 261 (1936).

This paper contains a statement without proof of certain theorems due to Pillai. Reference should be made to two papers by Dickson (this Zbl. 14, 251); in my abstract of these  $f$  is defined incorrectly and the notation should read:

$$q = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n\right], \quad f = \left[\left(\frac{4}{3}\right)^n\right], \quad r = 3^n - 2^n q.$$

In this notation, Pillai's results are as follows: (1) If  $7 \leq n \leq 30$ , then  $g(n) = 2^n + q - 2$ . (2) If  $n \geq 30$  and  $r \leq 2^n - (q + 3)$ , then  $g(n) = 2^n + q - 2$ . (These are identical with the corresponding results of Dickson.) (3) If  $r \geq 2^n - q + 1$ , then  $g(n) = 2^n + q + f - 2$  if  $r \geq 3^n(f+1) - 4^n$ , and  $g(n) = 2^n + q + f - 3$  if  $r < 3^n(f+1) - 4^n$ . Dickson has proved that, if  $r \geq 2^n - q$ , then  $g(n) = 2^n + q + f - 2$  if  $2^n = fq + f + q$  and  $g(n) = 2^n + q + f - 3$  if  $2^n < fq + f + q$ . Apart from the case  $r = 2^n - q$ , the results are the same and the conditions are in fact identical. From Pillai's results, we can calculate  $g(n)$  except in the cases:

$$(\alpha) \quad r = 2^n - q - 2, \quad (\beta) \quad r = 2^n - q - 1, \quad (\gamma) \quad r = 2^n - q.$$

Dickson has shown that his results hold for  $(\gamma)$  and that  $(\beta)$  only occurs when  $n = 1$ . The case  $(\alpha)$  apparently remains unsolved. *Wright* (Aberdeen).

**Mardšanišvili, K.: Über die simultane Zerfällung ganzer Zahlen in  $M$ -te und  $N$ -te Potenzen.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 2, 263—264 (1936).

Vinogradov had previously (Bull. Acad. Sci. URSS 1929) obtained an asymptotic formula, valid if  $s \geq 18 m^2 \cdot 2^m$ , for the number  $I_{M,N}$  of non-negative integers  $x_1, \dots, x_s$  satisfying simultaneously

$$x_1^m + \dots + x_s^m = M, \quad x_1^n + \dots + x_s^n = N.$$

Here  $m, n, M, N$  are natural numbers,  $m > n > 1$ . Improvements using Vinogradov's new approximations will be given. The formula is valid for  $s \geq C_0 m^6 \log m$ , and every sufficiently large pair  $M, N$  satisfying certain almost necessary conditions are actually so represented. *G. Pall* (Montreal).



**Fleek, Albert:** Die genaue Bestimmung der Anzahl  $\psi(n)$  der Primzahlen im Intervall 1 bis einschließlich  $n$ . *Wiadom. mat.* 42, 69—84 (1937).

By similar methods to those of Meissel (*Math. Ann.* 2, 636—642) an extension of his formula for calculating the number of primes  $\leq n$  is derived and illustrated. *Hull.*

**Brun, Viggo:** Une généralisation de trois identités concernant les nombres premiers et les nombres naturels 2, 3, 4, 5 . . . *Norske Vid. Selsk., Forh.* 9, 95—98 (1936).

Aus den bekannten Produktzerlegungen für  $\zeta(s)^{-1}$  und  $\left\{ \sum_n (-1)^n (2n+1)^{-s} \right\}^{-1}$  und der Reihe für  $(1-2^{1-s}) \zeta(s)$  werden durch Substitution von  $s-a$  an der Stelle von  $s$  drei Beziehungen abgeleitet unter Zuhilfenahme von  $\Phi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_n (-1)^{n-1} \frac{x^{ns}}{n!} = 0$

oder 1. Es sind Erweiterungen von Formeln des Verf. (7-de Skand. matem. Kongr. Oslo 1929). *N. G. W. H. Beeger* (Amsterdam).

**Erdős, P.:** On the integers which are the totient of a product of two primes. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 7, 227—229 (1936).

The author proves, by a method very similar to that used in a former paper (this Zbl. 13, 390), that, for an infinity of values of  $n$ , the number of solutions of the equation  $n = (p-1)(q-1)$ , where  $p$  and  $q$  are primes, is greater than  $\exp\{\sqrt{(\log n) - \varepsilon}\}$ . *Wright* (Aberdeen).

**Vinogradow, I. M.:** Supplement to the paper „On the number of fractional parts of a polynomial lying in a given interval“. *Rec. math. Moscou, N. s.* 1, 405—407 (1936).

Vgl. dies. Zbl. 14, 203 sowie auch 14, 11 u. 103. Verf. kann durch Verbesserung seiner Abschätzungen trigonometrischer Summen etwas schärfere Ergebnisse erzielen. Berichtigung eines Rechenfehlers in der im Titel zitierten Arbeit. *J. F. Koksma.*

## Gruppentheorie.

**Frame, J. S.:** The simple group of order 25920. *Duke math. J.* 2, 477—484 (1936).

Fortsetzung früherer Untersuchungen über die einfachen Gruppen  $HO(m, p^{2s})$  (vgl. dies. Zbl. 10, 252; 13, 56). Durch Heranziehung der zu diesen Gruppen gehörigen Hermiteschen Invarianten gelingt Verf. auch für den Fall  $m > 3$  die Zerspaltung der von ihm früher aufgestellten Darstellungen in irreduzible. Damit werden dann die Charaktere aller irreduziblen Darstellungen der Gruppe  $HO(4,4)$  der Ordnung 25920 aufgestellt. *G. Köthe* (Münster i. W.).

**Miller, G. A.:** Groups containing a relatively large number of operators of the same order. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* 22, 541—543 (1936).

$H$  sei eine Untergruppe der Gruppe  $G$  derart, daß alle  $p$ -ten Potenzen ( $p$  ist eine Primzahl) der Elemente von  $G$  in  $H$  liegen, die Faktorgruppe  $G/H$  abelsch ist,  $H$  die Ordnung  $p^n$  besitzt, und ein Element aus  $G$ , das nicht in  $H$  liegt, stets eine größere Ordnung besitzt als irgendein Element aus  $H$ .  $G/H$  ist dann notwendig endlich; im Falle  $p = 2$  werden die Gruppen  $G$  näher untersucht für den Fall gewisser einfacher Typen der Gruppe  $H$ . *Magnus* (Frankfurt a. M.).

**Manning, Dorothy:** On simply transitive groups with transitive Abelian subgroups of the same degree. *Trans. Amer. Math. Soc.* 40, 324—342 (1936).

Sind  $p$  und  $q$  gleiche oder verschiedene Primzahlen,  $a$  und  $b$  natürliche Zahlen,  $n = p^a q^b$ , so ist eine einfach transitive Permutationsgruppe vom Grade  $n$  imprimitiv und zusammengesetzt, wenn sie eine transitive Abelsche Untergruppe  $A$  vom Grade und der Ordnung  $n$  enthält, welche von zwei Elementen mit den Ordnungen  $p^a$  und  $q^b$  erzeugt wird, falls  $p^a \neq q^b$  ist. Für  $p^a = q^b$  gilt der Satz nicht allgemein, wie am Beispiel der von W. A. Manning [*Amer. J. Math.* 28, 235 (1906)] untersuchten einfach transitiven primitiven Gruppen vom Grade  $k^2$  ( $k > 2$ ) und der Ordnung  $2(k!)^2$  gezeigt wird. Der Beweis eines verwandten allgemeinen Satzes von Burnside [*Proc.*



Cambridge Philos. Soc. 20, 384 (1921)] ist daher nicht stichhaltig; für  $p \neq q$  ist der obenstehende Satz, da  $A$  dann zyklisch ist, in einem Satz von I. Schur (S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1933, 622; dies. Zbl. 7, 149) enthalten. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

**Baer, Reinhold, und Friedrich Levi:** Freie Produkte und ihre Untergruppen. *Compositio Math.* 3, 391—398 (1936).

Die von Kurosch (s. dies. Zbl. 9, 10) bewiesenen Sätze über die Untergruppen freier Produkte beliebiger Gruppen werden mit Hilfe einer topologischen Methode neu bewiesen; Ausgangspunkt ist die Bemerkung, daß jede Gruppe Fundamentalgruppe eines geeignet (z. B. mit Hilfe des Dehnschen Gruppenbildes) konstruierten Komplexes ist. Als Verschärfung der Resultate von Kurosch ergibt sich dabei u. a. der „Verfeinerungssatz“: Ist die Gruppe  $\mathfrak{G}$  sowohl freies Produkt der Gruppen  $\mathfrak{A}_\nu$  wie der Gruppen  $\mathfrak{B}_\mu$ , dann läßt sich jedes  $\mathfrak{A}_\nu$  (bzw.  $\mathfrak{B}_\mu$ ) in ein freies Produkt von Gruppen  $\mathfrak{A}_{\nu,k}$  und einer freien Gruppe  $\mathfrak{F}_\nu^a$  (bzw.  $\mathfrak{B}_{\mu,i}$  und  $\mathfrak{F}_\mu^b$ ) zerlegen derart, daß die  $\mathfrak{A}_{\nu,k}$  und  $\mathfrak{B}_{\mu,i}$  in  $\mathfrak{G}$  paarweise konjugiert sind und die freien Produkte aller Gruppen  $\mathfrak{F}_\nu^a$  bzw.  $\mathfrak{F}_\mu^b$  isomorphe freie Gruppen sind. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

**Bundgaard, Svend B. E.:** Über die Werteverteilung der Charaktere abelscher Gruppen. *Math.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk.* 14, Nr 4, 1—29 (1936).

Verf. verallgemeinert den klassischen Kroneckerschen Approximationssatz sowie den anschließenden Weylschen Satz über Gleichverteilung auf beliebige abelsche Gruppen. Das ausschlaggebende Hilfsmittel ist dabei der v. Neumannsche Mittelwertbegriff für fastperiodische Funktionen auf einer Gruppe (dies. Zbl. 9, 349). I. Approximationssätze. Sei  $\mathfrak{G}$  eine abelsche Gruppe und  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)$  beschränkte Charaktere von  $\mathfrak{G}$  [also  $|\varphi_n(t)| = 1$ ]. Für jedes  $t$  in  $\mathfrak{G}$  ist dann  $\zeta(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t))$  ein Punkt des  $N$ -dimensionalen Torusraums  $Q_N = (C, \dots, C)$ , wo  $C$  den Einheitskreis der komplexen Ebene bezeichnet. Dann gilt: Die abgeschlossene Hülle der Menge aller  $\zeta(t)$  in  $Q_N$  ist identisch mit der Menge derjenigen Punkte  $z = (z_1, \dots, z_N)$  in  $Q_N$ , für welche  $z_1^{g_1} \dots z_N^{g_N} = 1$  für jedes ganzzahlige  $N$ -tupel  $(g_1, \dots, g_N)$ , für welches  $\varphi_1(t)^{g_1} \dots \varphi_N(t)^{g_N}$  der Hauptcharakter von  $\mathfrak{G}$  ist. Wenn insbesondere  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)$  unabhängig sind, so liegt also die Menge aller  $\zeta(t)$  in  $Q_N$  überall dicht. Für stetige Charaktere der additiven Gruppe der reellen Zahlen ergibt sich speziell der Kroneckersche Satz. Die üblichen Beweise lassen sich übertragen, die analytischen auf Grund des v. Neumannschen Mittelwertbegriffes. II. Verteilungssätze. Erweitert man den v. Neumannschen Mittelwertbegriff nach den Richtlinien des Riemannschen Integrals, ergibt sich insbesondere in  $\mathfrak{G}$  ein Maßbegriff mit den Eigenschaften des Jordanschen Maßes, wobei  $\mathfrak{G}$  das Maß 1 bekommt. Dann gilt in Verallgemeinerung des Weylschen Satzes: Wenn die Charaktere  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)$  unabhängig sind, so ist die Menge aller  $\zeta(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t))$  sogar in  $Q_N$  gleichverteilt. Der Weylsche Beweis läßt sich übertragen, und es wird auch ein eleganter geometrischer Beweis auf Grund des Approximationssatzes gegeben. *B. Jessen* (Kopenhagen).

**Toyoda, Kôshichi:** On the universal covering group of Lie's continuous groups. *Proc. Imp. Acad. Jap.* 11, 405—406 (1935).

The paper gives a means of deducing the universal covering group from the fundamental solutions of the associated differential system. *J. M. Thomas* (Durham).

**Weil, A.:** La mesure invariante dans les espaces de groupes et les espaces homogènes. *Enseignement Math.* 35, 241 (1936).

**Michal, A. D., and E. W. Paxson:** Maps of abstract topological spaces in Banach spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* 42, 529—534 (1936).

Es werden abstrakte topologische Gruppen betrachtet, deren Umgebungen den Umgebungen eines Banachschen Raumes  $E$  homeomorph sind. Die Kompositionsregeln im Parameterraum  $E$  werden als  $r$ -mal differenzierbar vorausgesetzt. Die Lieschen Differentialgleichungen für kontinuierliche Gruppen lassen sich im gewissen Sinne auf diesen Fall übertragen. *Schauder* (Lwów).



**Kakutani, Shizuo:** Über die Metrisation der topologischen Gruppen. Proc. Imp. Acad. Jap. 12, 82—84 (1936).

The author shows that every Hausdorff group which satisfies the first denumerability axiom possesses a left-invariant metric. For example, such a metric is defined for the full matrix group of order  $n$  — a group which does not possess a left- and right-invariant metric — by the formula

$$\varrho(A, B) = \log\{1 + \|A^{-1}B - E\| + \|B^{-1}A - E\|\} \text{ where } \|A\| = \sum |a_{ij}|, \quad A = (a_{ij}).$$

P. A. Smith (New York).

**Birkhoff, Garrett:** A note on topological groups. Compositio Math. 3, 427—430 (1936).

The author proves that every “Hausdorff group”, i.e. a topological group which need not satisfy the countability-axioms, is homeomorphic with a metric space, if (and only if) it satisfies the first countability-axiom. Meanwhile the same theorem has been proved also by Shizuo Kakutani (cf. the prec. ref.), who moreover formulates explicitly the property of the metric of being one-sided invariant  $\varrho(zx, zy) = \varrho(x, y)$ .

D. van Dantzig (Delft).

## Mengenlehre und reelle Funktionen.

**Kuratowski, Casimir:** Sur un problème concernant l'induction transfinie. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1239—1241 (1936).

The universal set for analytically representable functions defined by Lebesgue (J. de Math. 1905, Chap. VIII) is projective and of class 3 at most. Chittenden (Iowa).

**Kuratowski, Casimir, et Waclaw Sierpiński:** Sur les ensembles qui ne contiennent aucun sous-ensemble indénombrable non-dense. Fundam. Math. 26, 137—142 (1936).

A set  $E$  has the property  $(L)$  if  $E$  is a subset of a straight line and for every non-dense subset  $N$  of the line,  $NE$  is countable. The following equivalences are established for metric separable spaces. The property:  $E$  is homeomorphic to a set with property  $(L)$ , is equivalent to:  $(\nu)$  every subset of  $E$  which is non-dense relative to  $E$  is countable. The property  $(\nu)$  is equivalent to: each real function on  $E$  with the property of Baire in the large sense is almost continuous. A function  $f$  on  $E$  has the property of Baire in the large sense if it becomes continuous after removing a properly chosen subset of  $E$  of the first category. If this property holds for every subset of the domain of  $f$ , the function has the property of Baire in the restricted sense. The property, every relatively non-dense subset of  $E_c$  (the set of points of condensation of  $E$ ), is countable is equivalent to: every function  $f$  on  $E$  having the property of Baire in the restricted sense is almost continuous. — Let  $E^*$  be a subset of the non-dense set of Cantor which is homeomorphic to a linear set with property  $(L)$ . Let  $E$  be a set obtained from  $E^*$  by the addition of an interior point of each interval continuous to the Cantor set. Then  $E$  does not have property  $(\nu)$ , but it is possessed by  $E^*$ . Chittenden (Iowa).

**Sierpiński, W.:** Sur une démonstration d'existence des ensembles infiniment universels. Mathematica, Cluj 12, 31—35 (1936).

Let  $\Phi$  be a family of linear or plane point sets. A system of plane sets  $U_1, U_2, \dots$ , is infinitely universal for the linear sets of  $\Phi$  if the intersections of the  $U_1, U_2, \dots$ , by the lines  $x = \text{const}$  are sets of  $\Phi$  and if for every infinite sequence  $E_1, E_2, \dots$ , of linear sets of  $\Phi$  there is a real number  $a$  such that the intersection of  $U_n$  by the line  $x = a$  is  $E_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  Lusin [C. R. Acad. Sci., Paris 189, 392 (1929)] has given a method for the construction of plane universal sets which can be applied to the construction of infinitely universal systems. The following alternative method is presented. Suppose  $\Phi$  has the following properties: (1) the intersection of  $\Phi$  by a line is a set of  $\Phi$ ; (2) if  $E$  is an element of  $\Phi$ ,  $n$  an integer and  $Q_n$  is the part of the plane contained between the lines  $y = n - 1$  and  $y = n$ , and if  $f_n(p)$  is a function which transforms  $Q_n$  homeomorphically into the entire plane the set  $f(EQ_n)$  belongs to  $\Phi$ ;



(3) if  $g_n(p)$  transforms the plane homeomorphically into all the points between the lines  $y = n - 1$  and  $y = n$ , and if  $E_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) are the sets of the family  $\Phi$ , the set formed of the lines  $y = n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , and the sets  $g_n(E_n)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , belong to  $\Phi$ . Suppose that for  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\Phi_n(t)$  is a function which transforms the interior of the interval  $(n - 1, n)$  homeomorphically into the set of all real numbers. For all points  $p$  of  $Q_n$ , let  $f_n(p) = f_n(x, y) = (x, \varphi_n(x))$ . If  $U$  is universal for the linear sets in  $\Phi$ , the sets  $f_1(UQ_1), f_2(UQ_2), \dots$ , belong to  $\Phi$  and form an infinitely universal system for the linear sets of  $\Phi$ . If  $\Phi$  has properties (1), (2), (3), so do  $\Phi_\sigma$  and  $\Phi_\delta$ . If there is a plane universal set for  $\Phi$  there exists a plane set which is universal for the linear sets of  $\Phi_\sigma$  and  $\Phi_\delta$ . Chittenden (Iowa).

**Sierpiński, W.:** Un théorème concernant les translations d'ensembles. *Fundam. Math.* **26**, 143—145 (1936).

The author demonstrated the following theorem. There is a linear set  $N$  which with its complement contains a perfect subset which is transformed into itself by each translation (along the line) if a set of points of power  $C$  is neglected. Chittenden.

**Sierpiński, W.:** Sur une famille d'ensembles parfaits. *Mathematica* **12**, 160—163 (1936).

Assuming the hypothesis of the continuum, there is an uncountable family  $F$  of disjoint linear perfect sets such that if  $\Phi$  is an arbitrary uncountable subfamily of  $F$  and an arbitrary non-null subset from each of the elements of  $\Phi$  the sum of these subsets is always non-measurable  $L$  (of the second category of Baire). Thus the question: "Given a family  $F$  of disjoint linear perfect sets, can one always choose a point in each of the sets of  $F$  such that the set of points chosen may be of measure zero (of the first category)?" is answered in the negative. Chittenden (Iowa).

**Sierpiński, W.:** Sur la séparabilité généralisée. *Fundam. Math.* **27**, 70—71 (1936).

Given a set  $E$  and a family  $\Phi$  of subsets of  $E$ , the elements of  $E$  are said to be separable by  $\Phi$ , if for every pair  $p, q$  of elements of  $E$  there exist two sets  $P$  and  $Q$  in  $\Phi$  such that  $p \in P$ ,  $q \in Q$  and  $P \cdot Q = 0$ . The author establishes the following theorem: If  $m$  is any infinite cardinal number; then in order that the elements of a set  $E$  should be separable by means of a family of sets  $\Phi$  of power  $\leq m$ , it is necessary and sufficient that  $E$  be of power  $\leq 2^m$ . Saks.

**Liapounoff, A.:** Sur la séparabilité multiple des ensembles mesurables **B. C. R. Soc. Sci. Varsovie** **28**, 117—118 (1936).

Außerordentlich einfache Beweise einiger Sätze von Sierpiński. Vgl. *Fundam. Math.* **23**, 292—303 (1934); dies. Zbl. **10**, 55. A. Kolmogoroff (Moskau).

**Szpilrajn, Edward:** Sur l'équivalence des suites d'ensembles et l'équivalence des fonctions. *Fundam. Math.* **26**, 302—326 (1936).

Let  $X, Y$ , be two spaces of the same power, otherwise arbitrary. Two mathematical objects  $A$  and  $B$  (sets, functions, etc.) defined in  $X, Y$ , respectively are equivalent (in the sense of the general theory of sets) when there is biunivocal transformation of  $X$  into  $Y$  which transforms  $A$  into  $B$ . If  $A$  and  $B$  are sets, the equivalence reduces to identity of powers. Let  $K$  be a class of subsets of  $X$ . If the product of a finite number of sets of  $K$  or the sum of a countable family of sets of  $K$  belong to  $K$  then  $K$  is a  $\sigma$ -ring. — A function  $f(x)$  transforming  $X$  into a metric space  $Y$  is measurable ( $K$ ) if the inverse image  $f^{-1}(a)$  of every open set in  $Y$  is an element of  $K$ . Two sequences  $a = \{A_n\}$ ,  $b = \{B_n\}$  of spaces  $X, Y$ , respectively, are equivalent when there is a biunivocal transformation  $\varphi$  of  $X$  into  $Y$  such that  $\varphi(A_n) = B_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . The function  $\varphi$  realizes the equivalence. Two functions  $g$  on  $X$  and  $h$  on  $Y$  are equivalent in case there is a biunivocal transformation  $\varphi$  of  $X$  into  $Y$  such that  $g(x) = h(\varphi(x))$  for all  $x$  in  $X$ . — In order that two functions  $g(x)$  and  $h(y)$  on  $X$  and  $Y$  respectively with values in  $h$  be equivalent it is necessary and sufficient that for each  $z$  in  $h$  the power of  $g^{-1}(z)$  equal the power of  $h^{-1}(z)$ . If two functions are equivalent they have the same type of equivalence. If  $X$  is an infinite space of power  $\nu$  and  $X_0$  is a subset of  $X$  of the same power, there are  $\nu$  types of equivalence of sequences of subsets of  $X_0$ . If  $I$  is the interval  $0 \leq x \leq I$ , and  $I^n$  is the fundamental cube in Cartesian space of  $n$ -dimensions there are  $2^\nu$  types of equivalence of sequences of subsets of  $I^n$  of measure null. For each sequence  $C$  of subsets of a space  $X$  of the power  $c$  there is another which is not equivalent to any sequence extracted



from  $C$ . There is a sequence of non-dense sets of measure zero in  $I^n$  which is not equivalent to any sequence of projective subsets of  $I^n$ . — Let  $N^*$  be the space of all irrational points of  $I$  and all the positive integers. If  $X$  is an uncountable separable complete metric space each uncountable Borel set in  $X$  is a biunivocal and continuous image of  $N^*$ . If  $g(x)$  is measurable ( $B$ ) on  $X$ , with values in  $Y$  (conditioned as  $X$ ) there is a biunivocal and continuous transformation  $g(t)$  of  $N^*$  into  $X$  such that  $g(\varphi(t))$  is continuous. Thus each Borel measurable function defined on  $X$  is equivalent to a function of the first class defined on a given space  $Y$ . If  $\{B_n\}$  is a sequence of Borel subsets of  $X$  there is a biunivocal and continuous transformation of  $N^*$  into  $X$  such that all the sets  $\varphi^{-1}(B_n)$  are open and closed in  $N^*$ . There is also a transformation  $\varphi(y)$  of  $Y$  into  $X$  which is biunivocal (and of the first class) such that all the sets  $\varphi^{-1}(B_n)$  are  $F_\sigma$  and  $G_\delta$ . — Denote by  $A_1$  the class of analytic sets, by  $C_1$  the class of complements of the sets of  $A_1$ , by  $A_{n+1}$  the continuous images of sets belonging to  $C_n$  and by  $C_{n+1}$  the complements of the sets of  $A_n$ . Let  $B_n = A_n C_n$ . The class  $B_1$  coincides with the Borel sets. For each function  $g$  measurable ( $B_n$ ) on  $X$ ,  $g(X)$  belongs to  $A_n$ . — There is for each  $n = 1, 2, \dots$ , a function measurable ( $B_{n+1}$ ) on  $X$  to  $Y$  which is not equivalent to any function measurable ( $B_n$ ). There is for each  $n = 1, 2, \dots$ , a sequence of sets of the class  $B_{n+1}$  relative to  $X$  which is not equivalent to any sequence of sets belonging to  $B_n$ . There is a sequence of subsets of  $X$  belonging to  $B_2$  which is not equivalent to any sequence of Borel sets. — Let  $B_1, B_2$ , be two Borel sets of the same power in  $X_1, X_2$  respectively such that  $X_1 - B_1$  and  $X_2 - B_2$  have the same power. There is for each  $g$  on  $X$  to  $Y$  which is measurable ( $B$ ) on  $X_1 - B_1$  a function  $h$  equivalent to  $g$  defined on  $X_2$  and measurable ( $B$ ) on  $X_2 - B_2$ . A transformation realizing this equivalence is a generalized homeomorphism. — The hypothesis of the continuum implies that every  $f$  admitting the property of Baire admits the property of Baire in the restricted sense. — There is a function  $g$  on an arbitrary space  $U$  of power  $c$  with values in the Cantor set  $C$  which is not equivalent to any Lebesgue measurable function. There is a sequence of subsets of  $U$  which is not equivalent to any sequence of Lebesgue measurable sets. The hypothesis of the continuum implies there is a sequence of subsets of  $U$  such that no sequence extracted from it is equivalent to a sequence of Lebesgue measurable sets. — Two sequences of functions  $\{g_n\}, \{h_n\}$  are equivalent in case there is a single transformation realizing the equivalence of  $g_n$  and  $h_n$  for  $n = 1, 2, \dots$ . — If  $X, Y, Z$  are uncountable, separable, complete, metric spaces, then for each sequence of measurable ( $B$ ) functions on  $X$  with values in  $Z$  there is (1) an equivalent sequence of functions on  $N^*$ ; (2) an equivalent sequence of functions of the second class on  $Y$ . The function  $\varphi$  realizing this equivalence is in case (1), continuous on  $N^*$ ; in case (2), of the first class on  $Y$ . Chittenden (Iowa).

**Sierpiński, W.:** Sur une suite universelle d'ensembles dénombrables. Fundam. Math. 26, 327—333 (1936).

The following theorem gives a solution of a problem of E. Szpilrajn (see the prec. review). There is an infinite sequence of sets  $X_1, X_2, \dots$ , of positive integers such that if  $Y_1, Y_2, \dots$  is a given infinite sequence of sets whose sum  $S = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$  is countable there is an infinite sequence of integers  $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$  and a biunivocal transformation  $f$  of the set  $N$  of all positive integers into  $S$ ,  $f(N) = S$ , such that  $f(X_k) = Y_m$  for  $m = 1, 2, 3, \dots$  Chittenden (Iowa).

**Haslam-Jones, U. S.:** The discontinuities of an arbitrary function of two variables. Quart. J. Math., Oxford Ser. 7, 184—190 (1936).

La note contient quelques applications intéressantes d'un théorème de Verčenko et Kolmogorov sur les tangentes aux ensembles plans [C. R. Acad. Sci. URSS 14, 361—364 (1934), ce Zbl. 11, 107; cf. aussi U. S. Haslam-Jones, Quart. J. Math., Oxford Ser. 7, 116—122 (1936), ce Zbl. 14, 107]. Etant donnée dans le plan une fonction réelle  $f(z)$ , où  $z = x + iy$ ,  $M_\alpha(z_0)$  et  $L_\alpha(z_0)$  denotent respectivement, pour tout point  $z_0$  et toute demi-direction  $\alpha$ , la limite supérieure de  $f(z)$  et l'ensemble des valeurs limites de  $f(z)$ , lorsque  $z$  tend à  $z_0$  de sorte qu'à la fois la demi-droite  $\vec{z_0 z}$  tend vers la demi-direction  $\alpha$ . L'ensemble de toutes les valeurs limites de  $f(z)$  lorsque  $z \rightarrow z_0$ , est désigné par  $L(z_0)$ . L'auteur démontre les théorèmes suivants dont le premier a été signalé aussi par Kolmogorov et Verčenko [C. R. Acad. Sci. URSS 1, 105 (1934); ce Zbl. 8, 343]: 1. Pour tout point  $z$ , excepté un ensemble de longueur nulle, il existe une demi-direction  $\omega = \omega(z)$  telle que  $M_\omega = M_{\omega+\pi}$ , et deux nombres  $M' = M'(z)$  et  $M'' = M''(z)$  tels que  $M_\alpha(z) = M'$  pour  $\omega - \pi < \alpha < \omega$  et  $M_\alpha(z) = M''$  pour  $\omega < \alpha < \omega + \pi$ . 2. Pour tout point  $z$ , excepté un en-



semble de longueur nulle, il existe une demi-direction  $\varphi = \varphi(z)$  telle que  $L_\varphi(z) = L_{\varphi+\pi}(z)$ , et deux ensembles fermés  $L' = L'(z)$  et  $L'' = L''(z)$  tels que  $L_\alpha(z) = L'$  pour  $\varphi - \pi < \alpha < \varphi$  et  $L_\alpha(z) = L''$  pour  $\varphi < \alpha < \varphi + \pi$ . 3.  $L_\alpha(z) = L(z)$  pour tout  $\alpha$  dans chaque point  $z$ , excepté tout au plus un ensemble formé d'une infinité dénombrable de courbes rectifiables. L'auteur démontre aussi quelques théorèmes élémentaires de W. H. et G. C. Young appartenant au même ordre d'idées. Saks (Warszawa).

**Whitney, Hassler:** Differentiable functions defined in arbitrary subsets of Euclidean space. Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 309—317 (1936).

En généralisant la définition de la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables, donnée dans un mémoire précédent [Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 63—89 (1934); ce Zbl. **8**, 249], M. Whitney définit la notion de différentiabilité d'une fonction sur un ensemble  $A$  autour d'un point  $b$ . Le point  $b$  est ici supposé d'être un point d'accumulation de l'ensemble  $A$ , toutefois sans appartenir nécessairement à cet ensemble; la fonction n'est supposée définie que sur l'ensemble  $A$ . Si une fonction est différentiable sur un ensemble  $A$  autour de tout point d'un ensemble  $B$ , elle est dite différentiable sur  $A$  autour  $B$ . L'auteur établit quelques théorèmes d'extension analogues à ceux démontrés dans le mémoire cité. En introduisant la notion de fonction de classe  $C^m$  autour d'un ensemble, il démontre p. ex. que toute fonction de classe  $C^m$  autour d'un ensemble  $B$  peut être étendue à un ensemble ouvert  $B'$  de sorte qu'elle soit de classe  $C^m$  dans  $B'$  et de classe  $C^{m-1}$  sur  $B'$  autour  $B$ . Saks.

**Brown, A. B.:** A proof of the Lebesgue condition for Riemann integrability. Amer. Math. Monthly **43**, 396—398 (1936).

The proof differs from the ordinary ones by that there is not used the fact that the set of points of discontinuity of a function, where the saltus is equal to or greater than a given number  $\eta$ , is closed. J. Ridder (Groningen).

**Kempisty, Stefan:** Sur la méthode triangulaire du calcul de l'aire d'une surface courbe. Bull. Soc. Math. France **64**, 119—132 (1936).

En se servant de la terminologie de la théorie générale des fonctions de rectangle, l'auteur étudie une classe des surfaces  $z = f(x, y)$  à l'aire finie. Un rectangle  $R = [a, a + h; b, b + k]$  est dit semi-régulier lorsque  $\frac{1}{2} \leq h/k \leq 2$ . D'une manière bien connue (en ne considérant que les systèmes de rectangles semi-réguliers) l'auteur définit, pour toute fonction de rectangle  $F(R)$  dans un rectangle  $R_0$ , l'intégrale semi-régulière supérieure  $\int_{R_0}^+ F$  et inférieure  $\int_{R_0}^- F$  de  $F$  sur  $R_0$ , et distingue les classes des fonctions de rectangle semi-régulièrement intégrables et des fonctions semi-régulièrement et absolument continues sur  $R_0$ . A toute surface continue  $z = f(x, y)$  dans  $R_0$  l'auteur attache une fonction de rectangle  $F(R)$ , en entendant par  $F(R)$  pour tout rectangle  $R \subset R_0$  la somme des aires de deux triangles inscrits dans la surface et correspondant respectivement aux deux triangles en lesquels le rectangle  $R$  est subdivisé par la diagonale principale. La surface  $z = f(x, y)$  est dite semi-régulièrement quarrable lorsque  $\int_{R_0}^+ |F| < +\infty$ . L'auteur démontre: Si la surface  $z = f(x, y)$  est semi-régulièrement quarrable, elle possède l'aire finie, et la fonction  $f(x, y)$  est presque partout totalement différentiable (au sens de Stolz); et, si de plus la fonction de rectangle  $F(R)$  est semi-régulièrement et absolument continue, l'aire de la surface est égale à l'intégrale  $\int_{R_0} F$ , la fonction  $f(x, y)$  étant absolument continue au sens de Tonelli. Il s'ensuit, en particulier, du dernier résultat que, lorsque la fonction  $F(R)$  est absolument continue, l'aire de la surface  $z = f(x, y)$  peut être calculée comme la limite d'une suite des aires des polyèdres inscrits. Saks (Warszawa).



## Analysis.

● Arbeiten der 2. mathematischen Bundestagung, Leningrad, 24.—30. VII. 1934.  
Bd. 2. Sektionsvorträge. Leningrad-Moskau: Verl. d. Akad. d. Wiss. CCCR. 1935.  
XIII, 467 S. [Russisch].

Markoff, A.: Sur une propriété caractéristique des polynômes trigonométriques.  
Compositio Math. 3, 305—309 (1936).

Démonstration du théorème:  $f(x)$  étant une fonction continue périodique de période 1,  $x$  réel, les sommes (1)  $\sum_{k=1}^n f(k\alpha)$  comme fonctions de  $n$  sont bornées pour tout nombre irrationnel  $\alpha$ , ou bien les valeurs de  $\alpha$  irrationnelles pour lesquelles (1) reste bornée, forment un ensemble de 1<sup>re</sup> catégorie. Le premier cas a lieu si on a:  
(2)  $f(x) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{2\pi i k x}$ ,  $a_0 = 0$ ; si  $f(x)$  n'a pas la forme (2), c'est le second cas qui se présente.  
W. Stepanoff (Moskau).

Corput, J. G. van der: Zur Methode der stationären Phase. II. Mitt. Wiederum einfache Integrale. Compositio Math. 3, 328—372 (1936).

Es handelt sich darum, unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen einen Näherungswert  $J'$  für das Integral

$$J = \int_a^b g(u) e^{f(u)} du$$

zu finden und  $|J - J'|$  abzuschätzen ( $g, f$  brauchen nicht reell zu sein). Wir nennen nur den folgenden Spezialfall (Satz 6) des Hauptsatzes (Satz 10): Für  $a \leq u \leq b$  sei  $f(u)$   $m$ -mal,  $g(u)$   $k$ -mal stetig differenzierbar ( $m \geq 3, 1 \leq k \leq m$ ); daselbst sei stets  $f''(u) \neq 0$ , also  $y(u) = |f'(u)| + \sqrt{|f''(u)|} > 0$ .  $\sqrt{|f''(u)|}$  werde irgendwie als stetige Funktion fixiert. Weiter sei  $r > 0, x \geq 1, G > 0$ , und für  $a \leq u \leq b$  sei

$$|f^{(\mu)}(u)| \leq r y^{(\mu)}(u) x^{-\frac{\mu}{m}} \quad (3 \leq \mu \leq m), \quad |g^{(\kappa)}(u)| \leq G y^{\kappa}(u) \quad (0 \leq \kappa < k), \quad |g^{(k)}(u)| \leq G x^{-1} y^k(u).$$

Man setze noch voraus, daß es in  $a < u < b$  höchstens eine endliche Anzahl von Punkten gibt, in welchen

$$f'(u) : \sqrt{|f''(u)|} \quad (1)$$

reell ist; diejenigen unter diesen Punkten, in welchen der Imaginärteil von (1) sein Vorzeichen ändert, mögen „führende Punkte“ heißen; man bezeichne sie mit  $v, v', \dots$ . Dann ist

$$J = A + B + V + V' + \dots + \omega G x^{-1} \int_a^b |e^{f(u)}| du,$$

wo  $|\omega|$  unter einer nur von  $m$  und  $r$  abhängigen Schranke liegt. Dabei hängt  $A$  bzw.  $B$  bzw.  $V$  usw. bei gegebenem  $k$  und  $m$  nur von  $f^{(\mu)}(a), g^{(\kappa)}(a)$  bzw. von  $f^{(\mu)}(b), g^{(\kappa)}(b)$  bzw. von  $f^{(\mu)}(v), g^{(\kappa)}(v)$  usw. ab ( $0 \leq \mu < m, 0 \leq \kappa < k$ ). — Man beachte folgende Spezialfälle: 1. Ist  $f$  reell, so muß  $f'' < 0$  sein [sonst wäre (1) stets reell], und der (einzige) führende Punkt ist derjenige Punkt aus  $a < u < b$ , in welchem  $f(u)$  sein Maximum annimmt (wenn es einen solchen gibt). 2. Ist  $f(u) = i\varphi(u)$  ( $\varphi$  reell), so hat man einen führenden Punkt dort, wo die „Phase“  $\varphi$  stationär ist ( $\varphi' = 0$ ). — Ferner werden die Werte  $A, B, V, \dots$  behandelt. Z. B. ist

$$V = \pm \int_{-\infty}^{\infty} [g(v+h)]_k [e^{f(v+h)-h f'(v)-\frac{1}{2} h^2 f''(v)}]_m e^{h f'(v) + \frac{1}{2} h^2 f''(v)} dh,$$

wo

$$[\psi(h)]_n = \psi(0) + \frac{h}{1!} \psi'(0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \psi^{(n-1)}(0)$$

ist; analog (aber doch etwas anders) für  $A, B$ . Im Satz 13 wird ein Näherungswert für  $V$  angegeben. — Ist  $g^{(\kappa)}(a) = 0$  für  $0 \leq \kappa < k$ , so ist  $A = 0$ ; analog für  $b$ . (Eine analoge Tatsache, d. h. die Neutralisation des Einflusses des Randes des Integrations-



gebietes soll nach einer Bemerkung des Verf. in der 3. Mitteilung bei mehrfachen Integralen eine wichtige Rolle spielen.) (I. s. dies. Zbl. 8, 251.) *Jarník* (Praha).

**Sobolev, S.:** Correction de l'article „Sur quelques évaluations concernant les familles des fonctions ayant des dérivées à carré intégrables“. *C. r. Acad. Sci. URSS*, N. s. 3, 107 (1936).

Richtigstellung und Vervollkommnung der Gegenbeispiele für die Tatsache, daß die in der im Titel genannten Arbeit (dies. Zbl. 14, 57) aufgestellten Sätze sich nicht weiter verallgemeinern lassen. *Schauder* (Lwów).

**Sheffer, I. M.:** A local solution of the difference equation  $\Delta y(x) = F(x)$  and of related equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* 39, 345—379 (1936).

The first part is devoted to the discussion of the local character of solutions of the difference-equation (\*)  $\Delta y \equiv y(x+1) - y(x) = F(x)$ , under various assumptions concerning the nature of the given function  $F(x)$ . A formal solution is given in the form

$$y(x) \sim \sum_0^{\infty} L(x+n) F(x+n) + \sum_1^{\infty} [1 + L(x-n)] F(x-n), \quad (1)$$

$L(x)$  being arbitrary — an important feature yielding, with a proper choice of  $L(x)$  ( $L(x) = -e^{-e^x}$ ) actual solutions of (\*) converging in certain regions, assuming  $F(x)$  analytic. Next,  $F(x)$  being analytic in  $|x| < r$ ,  $r > \frac{1}{2}$ , and making use of integral relations (Borel, Pincherle) connecting the functions  $\sum f_n x^n$ ,  $\sum f_n x^n / n!$ , an analytic solution of (\*) is found expressed in integral form, also for the equation  $y(x+1) - p(x)y(x) = 0$ . The author next exhibits the (analytic) solution of (\*),  $F(x)$  as above, in another interesting form, namely as a convergent expansion in series of polynomials  $\{(x+1)^n - x^n\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). (A study of series of the type  $\sum c_n \{(x+1)^n - x^n\}$  is given.) — In Part II the above methods are applied to the more general equation

$$L(y) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} a_i y(x + \omega_i) = F(x) \quad (x > 1; a_i, \omega_i \text{ given}), \quad (**)$$

( $\alpha_i, \omega_i$  — complex constants, no  $a_i$  is zero,  $\omega_i$  are distinct). Here expansions in series of the polynomials  $A_n(x) \equiv L(x^n)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) play an important role. A solution of (\*\*) is obtained, first, for  $F(x) = e^{tx}$  ( $t$  — parameter), next, for  $F(x)$  rational. Finally, the general case of  $F(x)$  analytic is studied, by treating first the meromorphic solutions of the equation  $L(y) = 1/(x - \alpha)$ . [This is given in a modified treatment to appear shortly in *Trans. Amer. Math. Soc.*, which the author very kindly gave me in manuscript form. Ref.] *J. Shohat* (Philadelphia).

### **Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:**

**Radon, Johann:** Restausdrücke bei Interpolations- und Quadraturformeln durch bestimmte Integrale. *Mh. Math. Phys.* 42, 389—396 (1935).

A very general treatment of this question from the point of view of adjoint differential forms. Let

$$L(f) = \int_a^b f(x) w(x) dx + \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=0}^{m-1} c_{\mu\nu} f^{(\mu)}(x_{\nu})$$

be a given linear operation and  $D_m(y) = \sum_{\mu=0}^m a_{\mu} y^{(m-\mu)}$  determined in such a way that

$L(y) = 0$  follows if  $D_m(y) = 0$ . Setting  $\Delta_e(z) = \sum_{\mu=0}^e (-1)^{e-\mu} \left(\frac{d}{dz}\right)^{e-\mu} (a_{\mu} z)$ , we de-

termine  $K$  and  $K_{\mu}$  from the following conditions: a)  $\Delta_m K = w(x)$  for  $x_i < x < x_{i+1}$ ; b) writing  $K_{\mu} = \Delta_{\mu} K$  we have  $K_{\mu}(x_{\nu} + 0) - K_{\mu}(x_{\nu} - 0) = -c_{m-1-\mu, \nu}$ . Then

$$L(f) = \int_a^b D_m(f) K(x) dx.$$

An illustration of this interesting formula is given in various special cases. *G. Szegő*.



**Voronovskaja, E.: Ein Minimalproblem in der Theorie der Momentfolgen und die Abschätzung der Polynome.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 103—106 (1936).

This Note (many of the notations employed are not sufficiently explained) is based upon the following result easily derivable (but not explicitly stated. Ref.) from a previous interesting Note by the author [ibid., 693—700 (1930)]. Let (\*)  $\{\mu_i\}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) be a "Moment-Sequence" [of numbers, or of functions taken at a definite point  $\subset (0, 1)$ ], that is

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} |\mu_{k,p-k}| \equiv \lim_{p \rightarrow \infty} M_p = M \quad \text{— Norm of (*)} \quad (1)$$

$\mu_{k,n} = \mu_k - \binom{n}{k} \mu_{k+1} \pm \dots \pm \mu_{k+n}$ ; ((1), in virtue of  $M_p \leq M_{p+1} \leq \dots$ , is equivalent to  $M_p < M$  for all  $p$ ). Let  $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ , polynomial of degree  $\leq n$ , converge uniformly to the continuous function  $f(x)$  on  $0 \leq x \leq 1$ . Then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(\bar{\mu}) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i \mu_i = f(\bar{\mu}) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \mu_{k,p-k} f\left(\frac{k}{p}\right). \quad (2)$$

By means of (2) the following results are established. 1°. Given an infinite sequence (\*) such that, for any  $f(x)$  continuous on  $0 \leq x \leq 1$   $|f(\bar{\mu})| \leq N \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ , equality actually attained. Then (\*) is a Moment-Sequence, with the Norm  $N$ . 2°. Corresponding to any finite sequence (\*\*)  $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$ , there exists a definite number  $N_{\mu_n} \geq 0$  such that for any  $p_n(x)$  — polynomial of degree  $\leq n$

$$|p_n(\bar{\mu})| \leq N_{\mu_n} \cdot \max_{0 \leq x \leq 1} |P_n(x)|,$$

equality actually attained. It follows that we may add to (\*\*) successively  $\mu_{n+1}, \mu_{n+2}, \dots$ , so that the corresponding  $N_{\mu_{n+1}}, N_{\mu_{n+2}}, \dots$  are, in each case, the smallest possible. We thus arrive at the "best continuation" of a given finite sequence (\*\*), i. e. at the building up of an infinite Moment-Sequence (\*) for which the Norm is the smallest possible.

J. Shohat (Philadelphia).

**Suchowitzki, S. I.: Über die Approximation der Funktionen durch Polynome.** J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 1, 49—61 u. deutsch. Zusammenfassung 61—62 (1936) [Russisch].

The problem considered is to determine asymptotically, for  $h \rightarrow 0$ ,  $p_{n-1}, p_{n-2}, \dots, p_0$  so that

$$p_{n+m}(x) = k_{n+m} h^m x^{n+m} + k_{n+m-1} h^{m-1} x^{n+m-1} + \dots + k_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0 \quad (I)$$

$k_{n+m}, \dots, k_n \neq 0, h$  given) deviates the least from zero on  $(-1, 1)$ . Following Bernstein, the author seeks to determine a new function deviating the least from zero on  $(-1, 1)$ , namely

$$R(x) \equiv P_{n+m}(x) + L(x) \equiv P_{n+m}(x) + \frac{r_1 x^{m-1} + \dots + r_m}{(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_m)},$$

where the  $r - s, \alpha - s$  are such that  $\max |L(x)|$  on  $(-1, 1) \rightarrow 0$  with  $h$ .  $R(x)$  must attain its modulus maximum on  $(-1, 1)$ , with alternating signs, at least  $n+1$  times.

This property, in connection with the substitution (Acheson)  $x = \frac{1}{2} \left( v + \frac{1}{v} \right)$ ,  $\alpha_i = \frac{1}{2} \left( a_i + \frac{1}{a_i} \right)$  ( $|a_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n$ ) leads to a new expression for  $R(x)$ , where

the polynomial part is expressed in terms of trigonometric polynomials. We thus obtain a system of equations which we solve asymptotically ( $h \rightarrow 0$ ). An application is given to finding the necessary corrections for the coefficients of Taylor polynomial

$(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$ , so that it deviates the least from  $f(x)$  on  $a - h, a + h$ , always under the assumption  $h \rightarrow 0$ .

J. Shohat (Philadelphia).



**Geronimus, J.:** On some extremal properties of polynomials. *Ann. of Math.*, II. s. 37, 483—517 (1936).

This is along the lines of research by the same author dealing with the extremal values of the linear expression  $\omega(P) \equiv \sum_{i=0}^s a_i A_i$  ( $s \leq n$ ,  $a_i = \text{given}$ ) formed by the coefficients of the polynomial  $P(x) = \sum_{i=0}^n A_{n-i} x_i$  subject to such or such conditions.

Here the conditions are: (1)  $L(P) = \int_{-1}^1 |P(x)| dx = 1$ , or (2)  $L(P') = \int_{-1}^1 |P'(x)| dx = 1$ , or (3) the same as (2),  $P(x)$  being monotonic in  $(-1, 1)$ . The case (2) is reduced to that of (1) by considering  $L(P)$  for the polynomial  $P(x)$  itself. In the case (3) the author shows that  $P(x)$  [this notation is used for the polynomial for which  $\omega(P)$  is extremum] is of the form  $\bar{P}(x) = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta u^2(x) dx$ ,  $\alpha, \beta = 0, 1$ , and then expresses  $u(x)$  in terms of Jacobi polynomials [the method employed and results obtained are similar to those of Tchebycheff, where  $P(x)$  is required to deviate the least from zero in  $(-1, 1)$ . Ref.]. In the case (1), with  $s \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ , the author first shows some properties of the zeros of  $P(x)$ . The main tool is writing

$$P(x) = \sum_{i=0}^n B_i U_{n-i}(x), \quad U_k(x) = \frac{\sin(k+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \omega(P) = \sum_{i=0}^s b_i B_i,$$

where the new constants  $b_i$  are expressed in terms of the  $a - s$ . It is shown that  $\omega(\bar{P}) = \frac{1}{2} |\mu_0| L(\bar{P})$ ,  $\mu_0$  being the root of largest modulus of a certain secular equation. Asymptotic formulae are further derived, when  $n \rightarrow \infty$  and  $s$  remains finite. The results obtained yield many extremal properties for polynomials satisfying one of the above conditions (1—3). Thus,  $\int_{-1}^1 |P(x)| dx = 1$  implies

$$|a_0 A_0 + a_1 A_1| \leq 2^{n-2} \{ |a_0| + (a_0^2 + a_1^2)^{\frac{1}{2}} \},$$

equality actually attained. We also get bounds for their coefficients. In an „Addenda“ the author tells of further progress made in the problem under consideration. *Shohat*.

**Jackson, Dunham:** Bernstein's theorem and trigonometric approximation. *Trans. Amer. Math. Soc.* 40, 225—251 (1936).

L'auteur complète sur certains points ses résultats antérieurs et, en particulier, ceux contenus dans sa monographie *The Theory of Approximation* (New York 1930). Pour donner une idée de la nature des théorèmes préliminaires plus ou moins analogues, signalons le théorème 8: Si  $\varrho(x)$  est une fonction non négative, telle que  $[\varrho(x)]^{-\Upsilon}$  est sommable pour  $\Upsilon > 0$  sur  $(a, b)$ , et  $T_n(x)$  est une somme trigonométrique d'ordre  $n$

satisfaisant à la condition  $\int_a^b \varrho(x) (T_n(x))^2 dx \leq 1$ , on a  $T_n(x) = O\left(n^{\frac{\Upsilon+1}{\Upsilon}}\right)$  pour  $a \leq x \leq b$ .

Ces propositions sont ensuite appliquées à l'étude de la convergence des suites des sommes trigonométriques  $T_n(x)$  vers  $f(x)$ , lorsque

$$G_{n,s} = \int_a^b |f(x) - T_n(x)|^s \varrho(x) dx \quad (1)$$

tends vers 0 avec  $\frac{1}{n}$  d'une façon connue. Indiquons, par exemple, le théorème suivant:

Si  $\varrho(x) \geq \lambda > 0$  est sommable sur  $(a, b)$ , et les sommes trigonométriques  $T_n(x)$  minimisent (1), on a dans tout intervalle fermé intérieur à  $(a, b)$

$$f(x) - T_n(x) = O\left(\frac{1}{n^s E_n}\right),$$

où  $E_n$  est la meilleure approximation de  $f(x)$  sur  $(a, b)$  par des sommes trigonométriques d'ordre  $n$ .

*S. Bernstein (Leningrad).*



Sz. Nagy, Béla v.: Über eine Frage aus der Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Math. Z. 41, 541—544 (1936).

Given the sequence  $\{e_n(x)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , with the following properties: a)  $e_n(x)$  is periodic with period 1; b) the  $e_n(x)$  form a complete orthonormal system of functions on  $0 \leq x < 1$ ; c) any  $f(x)$ , continuous, with period 1, may be approximated indefinitely by a bounded sequence of linear aggregates of the  $e_n(x)$ . The author raises the following interesting questions. Does there exist a real function  $\sigma(x)$ ,  $\uparrow$  in  $(-\infty, \infty)$  with  $\sigma(-\infty) = 0$ , continuous to the left, with respect to which the  $e_n(x)$  form a complete orthonormal system in  $(-\infty, \infty)$ ? To what degree is  $\sigma(x)$  determined? The answer is: it is necessary and sufficient that  $\sigma(x) = \int_{-\infty}^x \omega_G(y) dy$ , the integrand being the characteristic function of a measurable set  $G$  in  $(-\infty, \infty)$  with the following property: the points of  $(0, 1)$  congruents to points of  $G$  modulo 1 form a simple covering of the said interval. — The proof is based upon the use of the function  $\bar{\sigma}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sigma(s+m) - \sigma(m)$  which is  $\uparrow$  and continuous to the left in the interval  $0 \leq s < 1$ . Namely, through an extensive use of the properties (a, b, c) above, it is shown that  $\bar{\sigma}(y) = y$ , and the rest readily follows. J. Shohat (Philadelphia).

### Reihen:

Obrechhoff, Nicola: La développement moderne des méthodes de sommation des séries divergentes. (Athènes, 2.—9. IX. 1934.) Actes Congr. Interbalkan. Math. 121—128 (1935).

Ce travail contient un bref aperçu des procédés de sommation les plus importants et des travaux classiques sur ce sujet. E. Kogbetliantz (Téheran).

Hyslop, J. M.: On the summability of series by a method of Valiron. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 218—223 (1936).

Le procédé de sommation  $(V, \alpha)$  étudié dans cette note est un cas particulier du procédé de M. Valiron et il est défini par

$$(V, \alpha) - \lim \text{gén } s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu^{-\alpha}}{\Phi(\alpha) \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{n=-\mu}^{\infty} s_{n+\mu} \cdot e^{-\frac{n^2}{2} \mu^{-2\alpha}} \quad (\alpha \geq 0)$$

où  $\Phi(0) = 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2\pi^2}$ ,  $\Phi(\alpha) = 1$  pour  $0 < \alpha < 1$ ,  $\Phi(\alpha) = \frac{1}{2}$  pour  $\alpha > 1$  et

$$\Phi(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x} \cdot dx}{\sqrt{x}}. \text{ — L'auteur prouve les résultats suivants: } 1^\circ \text{ si } \sum_0^\infty a_n \text{ est}$$

sommable  $(C, p)$  où  $p > 0$  est un entier, alors elle est aussi sommable  $(V, 1)$  avec la même somme (th. 3);  $2^\circ$  si la moyenne arithmétique  $s_n^{(p)}$  d'ordre entier  $p$  ( $p \geq 0$ ) vérifie pour certain  $\varrho \geq 0$  la condition  $s_n^{(p)} = s + o(n^{-\varrho})$  alors la série est sommable  $(V, \alpha)$

avec la somme  $s$  pour tout  $\alpha$  vérifiant  $1 - \frac{\varrho}{p} \leq \alpha < 1$  (th. 2);  $3^\circ$  si  $\sum a_n$  converge elle est sommable  $(V, \alpha \geq 0)$  avec la même somme (th. 1);  $4^\circ$  si  $\sum a_n$  est sommable  $(V, \alpha)$ , où  $0 < \alpha < 1$ , et si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+p} - s_n) \geq 0$$

avec  $p = o(n^\alpha)$ , alors elle converge (th. 4).

E. Kogbetliantz (Téheran).

Hyslop, J. M.: The generalization of a theorem on Borel summability. Proc. London Math. Soc., II. s. 41, 243—256 (1936).

Eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  mit den Teilsummen  $s_n$  heißt  $(V, 1/2)$ -summierbar zur Summe  $s$ , wenn

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} s_n e^{-\frac{1}{2}(\mu-n)^2 \mu^{-1}} = s$$



gilt, wobei  $\mu$  die ganzen Zahlen durchlaufen soll [vgl. zu diesem Verfahren Hardy und Littlewood, Rend. Circ. mat. Palermo **41**, 36—53 (1916), sowie die daran anschließende Arbeit von Valiron, ebenda **42**, 267—284 (1917)]; sie heißt  $B$ -summierbar zur Summe  $s$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} s_n = s$$

gilt, wobei  $x$  kontinuierlich gegen  $\infty$  strebt (Borelsches Verfahren). — Nach Hardy und Littlewood (a. a. O.) folgt für Reihen  $\sum a_n$  mit  $s_n = o(n^{\frac{1}{2}})$  aus  $(V, \frac{1}{2}) - \sum a_n = s$  stets  $B - \sum a_n = s$  und umgekehrt. Verf. zeigt, daß diese Äquivalenz allgemeiner für Reihen mit  $s_n = O(n^{\lambda})$ ,  $\lambda$  beliebig positiv, besteht. — Aus diesem Satz ergeben sich neue Beziehungen der Cesàroschen Verfahren zum  $(V, \frac{1}{2})$ - und  $B$ -Verfahren (vgl. auch J. M. Hyslop, voranst. Ref.). Insbesondere gilt in Verallgemeinerung eines Satzes von Hardy [Quart. J. Math. **35**, 22—66 (1904)]: Ist  $p > 0$  ganz und besteht für die Cesàroschen Mittel  $p$ -ter Ordnung  $c_n^{(p)}$  von  $\sum a_n$  die Beziehung  $c_n^{(p)} = s + o(n^{-\frac{1}{2}p})$ , so ist  $B - \sum a_n = s$ . — Schließlich wird der Bereich der  $(V, \frac{1}{2})$ -Summierbarkeit von  $\sum z^n$  betrachtet und daran anschließend die Frage der Notwendigkeit der Bedingung  $s_n = O(n^{\lambda})$  im Äquivalenzsatz der  $(V, \frac{1}{2})$ - und  $B$ -Verfahren erörtert. Lösch.

**Takahashi, Tatsuo:** Eine Bemerkung über die Summierbarkeit der Fourierreihen. Proc. Imp. Acad. Jap. **11**, 401—402 (1935).

On connaît d'après Hardy et Littlewood que la condition

$$(C) \quad \int_0^t |\varphi(u)| \cdot du = o\{t \cdot [\log t^{-1}]^{-1}\} \quad (t \rightarrow 0)$$

où  $2\varphi(t) = f(x_0 + t) - 2s + f(x_0 - t)$ , assure la sommabilité de la série de Fourier de  $f(x)$  au point  $x = x_0$  par le procédé de Borel. L'auteur a prouvé que la condition (C) est suffisante pour sa sommabilité en ce point par le procédé d'Euler défini ainsi:

$$E - \lim_{n \rightarrow \infty} \text{gén} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \left\{ \sum_{\kappa=0}^n \binom{n}{\kappa} s_{\kappa} \right\}. \quad E. Kogbetliantz.$$

### Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

**Wintner, Aurel:** The almost periodic behavior of the function  $1/\zeta(1+it)$ . Duke math. J. **2**, 443—446 (1936).

Bekanntlich ist  $\frac{1}{\zeta(1+it)} = \sum_1^{\infty} \mu(n) n^{-(1+it)} = \sum_1^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} e^{-it \log n}$ . Landau hat bewiesen (Handbuch, 801—804), daß

$$\mathfrak{M} \left\{ \frac{1}{|\zeta(1+it)|^2} \right\} = \sum_1^{\infty} \left( \frac{\mu(n)}{n} \right)^2, \quad \text{wo} \quad \mathfrak{M}\{\dots\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dots dt.$$

Verf. beweist die allgemeinere Formel

$$\mathfrak{M} \left\{ \left| \frac{1}{\zeta(1+it)} - \sum_1^q \mu(n) n^{-(1+it)} \right|^2 \right\} = \sum_{q+1}^{\infty} \left( \frac{\mu(n)}{n} \right)^2,$$

was damit gleichbedeutend ist, daß  $\frac{1}{\zeta(1+it)}$   $B^2$ -fastperiodisch ist mit der Fourierreihe  $\sum_1^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} e^{-it \log n}$ . B. Jessen (Kopenhagen).

**Favard, J.:** Note sur les fonctions presque-périodiques. Mat. Tidsskr. B **1936**, 71—75.

Es handelt sich um die sogenannten Multiplikatoren der Fourierentwicklung  $f(t) \sim \sum_1^{\infty} A_n e^{iA_n t}$  einer fastperiodischen Funktion  $f(t)$  der reellen Veränderlichen  $t$ . —



Zwei Sätze werden angekündigt und bewiesen: I. Die Funktion  $f(t)$  habe ein beschränktes unbestimmtes Integral;  $K(x)$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , soll eine reelle Funktion bezeichnen derart, daß sowohl  $K(x)$  wie auch  $|K(x)|$  in jedem endlichen Intervall integrierbar sind und daß  $K(x)$  außerhalb eines Intervalls  $-C < x < C$  für  $x \rightarrow +\infty$  bzw.  $x \rightarrow -\infty$  monoton gegen Null strebt. Dann stellt

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x+t) K(x) dx$$

eine fastperiodische Funktion mit der Entwicklung

$$g(t) \sim \sum_1^{\infty} \left\{ A_n \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) e^{-i A_n x} dx \right\} e^{i A_n t}$$

dar. II. Der Kern  $K(x)$  sei in  $-\infty < A \leq x < a$  und in  $a < x \leq B < +\infty$  definiert,  $K(x)$  und  $|K(x)|$  seien in jedem dieser Intervalle integrierbar. Unter der Voraussetzung, daß der Cauchysche Hauptwert von  $\int_A^B K(x) dx$  bzw.  $\int_A^B \omega(x-a) |K(x)| dx$ , wo  $\omega(x) = \lim_{-\infty < t < +\infty} |f(-x+t) - f(t)|$ , existiert, ist der Hauptwert

$$h(t) = \int_A^B f(-x+t) K(x) dx$$

eine fastperiodische Funktion mit der Entwicklung

$$h(t) \sim \sum_1^{\infty} \left\{ A_n \int_A^B K(x) e^{-i A_n x} dx \right\} e^{i A_n t}.$$

Richard Petersen (Kopenhagen).

### Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

Bompiani, E.: Sulla normalizzazione delle equazioni differenziali lineari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 807—812 (1936).

Il est bien connu qu'à chaque équation différentielle linéaire homogène d'ordre  $n$

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_2(t) \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + a_n(t) x = 0 \quad (1)$$

on peut faire correspondre une courbe  $C$  de  $S_{n-1}$ , univoquement obtenible (à moins d'une transformation homographique) en prenant  $n$  intégraux  $x_i = x_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) linéairement indépendants de la (1) comme coordonnées projectives homogènes des ses points. Réciproquement, à une courbe  $C$  donnée correspond toute une classe d'équations différentielles de la forme (1), déduisibles l'une de l'autre au moyen des transformations

$$x_i(t) = \varrho(t) \bar{x}_i(t), \quad \bar{t} = \bar{t}(t) \quad (2)$$

(avec  $\varrho, \bar{t}$  fonctions arbitraires de  $t$ ); cette classe contient toujours  $\infty^4$  équations différentielles ayant la forme canonique de Laguerre-Forsyth

$$\frac{d^n x}{dt^n} + b_3(t) \frac{d^{n-3} x}{dt^{n-3}} + \dots + b_n(t) x = 0,$$

et l'on passe d'une de ces équations à l'autre moyennant les transformations (2) données par

$$\varrho = \frac{1}{c} (\gamma t + \delta)^{n-1}, \quad \bar{t} = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \quad [c(\alpha \delta - \beta \gamma) \neq 0; c, \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ const.}]$$

(cfr., p. ex., E. I. Wilczynski, Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, ch. II, § 4. Leipzig: Teubner 1906). — Normaliser la (1) signifie choisir les fonctions  $\varrho(t)$  et  $\bar{t}(t)$  d'une façon déterminée, et trouver l'équation différentielle satisfaite par les  $\bar{x}_i(\bar{t})$ : cela est interprété ici géométriquement en relation à  $C$ , avec égard particulier au cas où l'équation transformée admet la forme canonique de Laguerre-Forsyth. L'étude approfondie de ce cas se base sur une configuration

intéressante et élégante, attachée à une courbe  $C$  quelconque de  $S_{n-1}$ , au moyen de laquelle on peut introduire géométriquement sur  $C$  un paramètre projectif (coincisant avec la variable indépendante qui figure dans une des équations de Laguerre-Forsyth déterminées par  $C$  et) qui, à son tour, permet de définir le rapport harmonique de 4 points sur une courbe de  $S_{n-1}$  ou sur une surface de l'espace ordinaire. — Le travail en question ne fait que résumer (sans démonstrations) un Mémoire qui paraîtra dans les Ann. Sci. Univ. Jassy. *Beniamino Segre.*

**Rainville, E. D.:** Necessary conditions for polynomial solutions of certain Riccati equations. Amer. Math. Monthly 43, 473—476 (1936).

**Frola, E.:** Sulla equazione  $(C(x)y'(x))' = -\lambda M(x) \sin y(x)$ ;  $y(0) = y(1) = 0$ . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 744—752 (1936).

Cette équation ( $C > 0$ ,  $M > 0$ ), importante dans la théorie d'instabilité élastique, ainsi que l'équation intégrale correspondante  $y(x) = \lambda \int_0^1 N(x, \xi) \sin y(\xi) d\xi$  [ $N(x, \xi) = M(\xi)G(x, \xi)$ ,  $G$  étant la fonction de Green], sont étudiées du point de vue de la recherche des solutions réelles autres que  $y \equiv 0$ . Les résultats: soient  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  les valeurs caractéristiques de l'équation linéaire  $y(x) = \lambda \int_0^1 N(x, \xi) y(\xi) d\xi$ ; pour  $|\lambda| < \lambda_1$  la solution unique est  $y = 0$ ; chaque valeur  $\lambda_r$  donne naissance à une solution („branche“) de la forme

$$y(x|\lambda) = (\lambda - \lambda_r)^{\frac{1}{2}} [y_0(x) + (\lambda - \lambda_r) y_1(x) + \dots], \quad y_0(x) = \sqrt{6/\lambda_r} \left[ \int_0^1 f_r(\xi) M(\xi) d\xi \right]^{-\frac{1}{2}} f_r(x),$$

$f_r$  étant la fonction fondamentale (supposée unique) normée relative à  $\lambda_r$  (la démonstration de la convergence de la série manque); le nombre des zéros sur chaque branche est indépendant de  $\lambda$ . *W. Stepanoff (Moskau).*

**Gevrey, Maurice:** Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques imaginaires multiples. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 604—606 (1936).

Soit  $\mathfrak{D}^p$  l'opération obtenue en effectuant  $p$  fois l'opération  $\sum_{i,j} a_{ij} \partial^2 / \partial x_i \partial x_j$ , les coefficients variables  $a_{ij}$  étant traités comme des constantes, et le nombre  $m$  des variables étant arbitraire; la forme  $\sum_{i,j} a_{ij} p_i p_j$  est supposée définie et positive. L'aut. considère un système de  $n$  équations dont chacune est de la forme

$$\mathfrak{D}^{p_k} u_k + \Phi_k(u_1, \dots, u_n) = f_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

où les  $\Phi_k$  sont des fonctions linéaires et homogènes des inconnues  $u_1, \dots, u_n$  et de leurs dérivées jusqu'à certains ordres; il semble que l'aut. admet que les coefficients  $a_{ij}$  dépendent aussi de  $k$ . L'aut. indique comment il peut former un système de fonctions  $u_1, \dots, u_n$ , tel que ces équations soient satisfaites dans un domaine  $D$ , et que leurs dérivées conormales jusqu'à certains ordres prennent des valeurs données en chaque point de la frontière  $S$  de  $D$ . La méthode est une généralisation de celle que l'aut. a décrite pour le cas particulier où tous les  $p_k$  sont égaux à un (ce Zbl. 11, 403).

*Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).*

**Ásgeirsson, Leifur:** Über eine Mittelwertseigenschaft von Lösungen homogener linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Math. Ann. 113, 321—346 (1936).

Es wird bewiesen: Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $u(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$  genügt dann und nur dann der Gleichung  $\sum (u_{x_i x_i} - u_{y_i y_i}) = 0$ , wenn in ihrem Definitionsbereich der Mittelwert von  $u(x_1, \dots, x_n; y_{10}, \dots, y_{n0})$  über  $\sum (x_i - x_{i0})^2 = r^2$  gleich ist dem Mittelwert von  $u(x_{10}, \dots, x_{n0}; y_1, \dots, y_n)$  über  $\sum (y_i - y_{i0})^2 = r^2$ . Durch Einführung von Hilfsveränderlichen wird hieraus auch ein Mittelwertsatz für analoge Gleichungen in  $n + m$  Veränderlichen abgeleitet. Zusammenhänge mit der Wellengleichung und mit der Potentialgleichung. *W. Feller (Stockholm).*



**Romberg, W.:** Bemerkung über die Gültigkeitsgrenzen der Galerkinschen Näherungsmethode für Eigenwertprobleme. *Techn. Physics USSR* 3, 489—491 (1936).

For approximating the characteristic values of a self-adjoint differential equation there is a well-known method due to Ritz. B. Galerkin has devised another method. For self-adjoint equations this is equivalent to Ritz'. For non-self-adjoint equations Galerkin's method still applies (Ritz' does not); but by an example it is shown that the second approximation can be poorer than the first. *McShane* (Virginia).

**Privaloff, I.:** Sur certains problèmes extrémaux des fonctions subharmoniques. *Rec. math. Moscou, N. s.* 1, 297—301 u. franz. Zusammenfassung 302 (1936) [Russisch].

The author determines the extremal values for two integrals associated to a simply connected bounded open region  $D$ . Let namely  $z_0$  be a fixed point in  $D$ , and  $\zeta = f(z)$ ,  $f(z_0) = 0$ , a univalent holomorphic function which transforms  $D$  into an open circle  $|z| < \varrho$ . Then, if  $V(z)$  is a logarithmically subharmonic function in  $D$  subject to  $V(z_0) = 1$ , the integrals  $\int_D |z - z_0| V^p(z) dx dy$  and  $\int_D V^p(z) dx dy$  ( $p > 0$ ) attain their respective minimum values  $2\pi \varrho^{p+2}/(p+2)$  and  $\pi \varrho^2$  for  $V(z) = |f(z)| \cdot |f'(z)|^{2/p} / |z - z_0|$  and  $V(z) = |f'(z)|^{2/p}$ , respectively. Similarly, if  $M(V)$  denotes the upper bound of  $|z - z_0| \cdot V(z)$  in  $D$ , the minimum of  $M(V)$  is equal to  $\varrho$  and is obtained for  $V(z) = \varrho \exp[-G(z; z_0)]/|z - z_0|$  where  $G(z; z_0)$  is the Green function of  $D$  with the pole at  $z_0$ . *Saks* (Warszawa).

### Spezielle Funktionen:

**Petrovitch, Michel:** Théorème sur les fonctions algébriques à coefficients tayloriens commensurables. *Rev. math. Union Interbalkan.* 1, 11—16 (1936).

**Sansone, G.:** Limitazione dell'integrale  $\int_{-1}^1 |P_n(x)|^m dx$ . *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s.* 23, 296—302 (1936).

An estimate of the integral under discussion is given in terms of  $n, m$ . The author first takes  $0 < m < 4$  and uses Stieltjes-Fejér limitation for Legendre polynomials combined with Schwartz inequality applied to  $\int_{-1}^1 |P_n|^{m/2} \cdot |P_n|^{2-m/2} dx$ . For  $m = 4$  use is made of Adams expression of  $P_n^2(x)$  in terms of Legendre polynomials. Finally, for  $m = 4 + 4\delta$ ,  $\delta > 0$  use is made of Stieltjes asymptotic expansion for  $P_n(\cos \gamma)$ ,  $0 < \gamma < \pi$ . The Note closes with a discussion of the applicability of Young-Hausdorff-F. Riesz theorem to the (non-bounded) sequence of orthonormal functions  $\left\{ \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x) \right\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  *J. Shohat* (Philadelphia).

**Mitra, S. C.:** On certain new connections between Legendre and Bessel functions. *Math. Z.* 41, 680—685 (1936).

The object of this paper is to give some new relations between Legendre and Bessel functions. Typical formulae are

$$\int_0^1 P_n(1 - 2y^2) J_0(yz) y dy = z^{-1} J_{2n+1}(z),$$

$$\int_0^1 P_n(1 - 2y^2) \sin 2yz dy = \frac{1}{2} \pi J_{n+\frac{1}{2}}^2(z),$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 P_n(1 - 2y^2) J_0(2\sqrt{k}y) K_0(2\sqrt{k}y) y dy \\ &= \frac{1}{2(2n+1)} \{ J_{2n}(2\sqrt{k}) K_{2n}(2\sqrt{k}) + J_{2n+2}(2\sqrt{k}) K_{2n+2}(2\sqrt{k}) \}, \\ & \int_0^1 (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \{ J_{n+\frac{1}{2}}^2(tz) \} dt = J_{2n+1}^2(2z). \end{aligned}$$

*W. N. Bailey* (Stockport, Cheshire).

**Hlawka, Edmund:** Eine asymptotische Formel der Laguerreschen Polynome. *Mh. Math. Phys.* **42**, 275—278 (1935).

Using the differential equation of the Laguerre polynomials  $L_n(x)$  defined by  $(1-z)^{-1} \exp\left(-\frac{xz}{1-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n$  the author obtains the formula

$$e^{-x/2} L_n(x) = J_0(2\sqrt{nx}) + O(n^{-3/4})$$

where  $x > 0$  is bounded and  $J_0$  denotes Bessel's function of the first kind. — Cf. the paper of E. Maitland Wright in the *J. London Math. Soc.* **7**, 256 (1932) (this *Zbl.* **5**, 351).

*G. Szegő* (St. Louis, Mo.).

**Sharma, J. L.:** On integrals involving Lamé functions. *J. Indian Math. Soc.*, N. s. **2**, 125—130 (1936).

The author considers Lamé's potential equation (see *Erg. Math.* **1**, H. 3, 53) in the Weierstrassian form and starts from its solutions for unrestricted values of the parameter in the form, given by Hermite and Halphen, called by him generalized Lamé functions. He sets down the four species, contained in the formal solution and starts to evaluate definite integrals, the integrand of which contains a product of two generalized Lamé functions. By inserting the formal expressions for these functions into the integrand, the integral is calculated in an elementary manner. The functions in the integrand are of the same order. Three special cases of this integral formula are considered. First, two functions, corresponding to different eigenvalues of Lamé's equation. Then, two functions of different species and third, the square of one function. Functions of the same species, corresponding to eigenvalues are orthogonal. Generalized Lamé functions, however, form a non-orthogonal set. Finally the theorem is announced, that the integral of the product of two generalized Lamé functions of the same order is different from zero unless both of them are of the first kind and of the same species.

*M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

**Ryjik, J.:** Sur la représentation de la série hypergéométrique  $F(\alpha, n, \gamma, x)$  comme solution d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre. *Bull. Sci. math.*, II. s. **60**, 262—268 (1936).

Rekursive Berechnung von  $F(\alpha, n, \gamma, x)$  für positives ganzes  $n$  und Aufstellung einer Differentialgleichung 1. Ordnung, die  $F(\alpha, n, \gamma, x)$  als Partikularlösung besitzt.

*v. Koppenfels* (Hannover).

**Duffahel, Maurice de:** Some hyperspace harmonic analysis problems introducing extensions of Mathieu's equations. *Bull. Calcutta Math. Soc.* **27**, 201—206 (1935).

Considering a four dimensional potential equation in the variables  $x y z t$  and the change of variables  $x = ((\varrho - 1)(\mu - 1)(\nu - 1))^{1/2}$ ;  $y = \sqrt{-\varrho\mu\nu} \cos \Phi$ ;  $z = \sqrt{-\varrho\mu\nu} \sin \Phi$ ;  $t = -(\varrho + \mu + \nu - 1)/2$  and separating the solution of the new potential equation by  $R(\varrho) M(\mu) N(\nu) \cos m\Phi$  three exactly similar equations result for  $R$ ,  $M$  and  $N$ , which, by  $R = S(\varrho) \varrho^{m/2}$  and  $\varrho = \sin^2 \theta$  assume the form:

$$\frac{d^2 S}{d\theta^2} + (2m + 1) \cot \theta \frac{dS}{d\theta} - 4[h + k + \frac{1}{4}m(m + 1) - k \cos^2 \theta] S = 0.$$

which is called the equation of Mathieu's associated functions. Starting again from the four dimensional Laplace equation and taking  $x = ((\varrho - 1)(\mu - 1)(\nu - 1))^{1/2}$ ;  $y = \sqrt{-\varrho\mu\nu}$ ;  $z = -(\varrho + \mu + \nu - 1)/2$  and  $t = t$  and solving the new equation by  $e^{\lambda t} R(\varrho) M(\mu) N(\nu)$ , with  $\varrho = \cos^2 \theta$  leads to:

$$\frac{d^2 R}{d\theta^2} + (\alpha + \beta \cos 2\theta + \gamma \cos 4\theta) R = 0,$$

this being a known extension of Mathieu's equation. It is remarked, that this latter equation would also result, if one solves the common wave equation in three dimensional space in a region bounded by the confocal paraboloids, represented by the latter change of variables above.

*M. J. O. Strutt* (Eindhoven).



# Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Chadenson, L.: Sur un espace fonctionnel de la mécanique quantique. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1974—1977 (1936).

Continuing a previous note (this Zbl. 8, 252) the author attempts to characterize and to operate with functions which can be uniquely represented as a sum of a discontinuous spectrum  $\sum A_n e^{i\lambda_n x}$  and a continuous spectrum  $\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$ . The functions which the author claims to fall under his considerations are those for which the mean-value  $M(|f|^2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt$  exists. It seems to the reviewer that this cannot

be correct since there are functions for which  $M(|f|^2) = 0$  and which certainly do not have a continuous spectrum [see S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, 1932, p. 80, formula (13)].

González Domínguez, Alberto: Sur un théorème de M. Glivenko. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 577—579 (1936).

Verf. gibt einen einfachen Beweis des folgenden Satzes: Damit eine Folge  $u_n(x)$  von Verteilungsfunktionen im wesentlichen gegen eine Verteilungsfunktion  $u(x)$  konvergiert, ist die Konvergenz von  $\int e^{itx} du_n(x)$  gegen  $\int e^{itx} du(x)$  notwendig und hinreichend (die Gleichmäßigkeit der Konvergenz ist dabei nicht vorausgesetzt). Dieser Satz wurde zuerst von S. Bochner bewiesen [Math. Ann. **108**, 378—410 (1933); dies. Zbl. 7, 108].

A. Kolmogoroff (Moskau).

Haviland, E. K.: On the inversion formula for Fourier-Stieltjes transforms in more than one dimension. II. Amer. J. Math. **57**, 382—388 (1935).

Eine Folge von Verteilungsfunktionen  $\{\varphi_n\}$  konvergiert dann und nur dann gegen eine Verteilungsfunktion  $\varphi$ , falls die Fouriertransformierte von  $\varphi_n$ , für  $n \rightarrow \infty$ , gleichmäßig in jedem endlichen Intervall gegen eine Grenzfunktion konvergiert; die Grenzfunktion ist dann die Fouriertransformierte von  $\varphi$ . Für diesen sog. Stetigkeitssatz der Fouriertransformation gibt der Verf. für den mehrdimensionalen Fall eine neue Beweisanordnung. Dabei benutzt er seine Übertragung der Inversionsformel auf mehrere Dimensionen (dies. Zbl. 12, 63).

I. J. Schoenberg (Waterville).

Takahashi, Tatsuo: A theorem on Fourier transform. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. **25**, 323—332 (1936).

If  $f(x) \in L^p(-\pi, \pi)$ ,  $p > 1$ , and  $s_\nu(x)$  is the  $\nu$ -th partial sum of its Fourier series then, for every  $k > 1$ ,  $\sum_{\nu=0}^n |s_\nu(x) - f(x)|^k = o(n)$  provided

$$(*) \int_0^t \varphi(u) du = o(t), \int_0^t |\varphi(u)|^p du = O(t), \text{ where } 2\varphi(u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x).$$

— The author proves the following analogue. If  $f(x)$  belongs to  $L^p$  on every finite interval and has, in the sense of A. C. Offord, a transform  $F(x)$  which  $\subset L^q(-\infty, \infty)$  for some  $q > 1$ , then

$$\int_0^\omega \left| (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-a}^a F(u) e^{ixu} du - f(x) \right|^k da = o(\omega)$$

provided (\*) holds. — A similar theorem if  $f(x)$  and  $F(x)$  are interchanged. Bochner.

Takahashi, Tatsuo: On positive Fourier transform. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. **25**, 332—337 (1936).

In analogy to a theorem of Paley on Fourier series with positive terms the author proves the existence of a number  $A$  with the following property. If  $f(x) \in L(0, \infty)$  and  $|f(x)| \leq M$ , and  $F(x)$  and  $H(x)$  are the cosine and sine transform of  $f(x)$  respectively, then  $\left| \int_0^\omega \cos xu F(u) du \right| \leq AM$  if  $F(x) \geq 0$  and  $\left| \int_0^\omega \sin xu H(u) du \right| \leq AM$  if  $H(u) \geq 0$ .

Also, if  $f(x)$  is continuous in  $(0, \infty)$  then these integrals are uniformly convergent as  $\omega \rightarrow \infty$  in every finite interval of  $x$ . — The author modifies Paley's proof in one point but this modification could be avoided. *Bochner (Princeton).*

**Gunther, N.:** Sur les équations intégrales aux noyaux du type Fourier de Mr. H. Weyl. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 2, 21—46 (1936).

It is shown that integral equations whose kernels are of Fourier type, as defined in H. Weyl's thesis, can be transformed into integral equations of Fredholm-Stieltjes type, to which the theory developed in previous papers of the author can be applied. This method allows to avoid the usage of quadratic forms in infinitely many variables employed by Weyl and thus yields slightly more general results than those obtained by Weyl. *J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).*

**Ignatovskij, V. S.:** Zur Laplace-Transformation. II. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 2, 171—174 (1936).

The author discusses a non-homogeneous hyperbolic boundary value problem by means of a Laplace transformation. It should be observed that a considerably more general problem was treated by the same method, and solved, by Plancherel and by Mächler (this Zbl. 6, 307). (I. see this Zbl. 11, 256.) *J. D. Tamarkin.*

**Broggi, U.:** Sulle funzioni determinanti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 386—390 (1936).

In previous notes (this Zbl. 12, 350, 351; 13, 171, 399 and 14, 353) the author has investigated the relations between Laplace transforms and Laguerre series. Let

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \Phi(t) dt,$$

$$zF(z) = \sum_0^{\infty} \alpha_n \left( \frac{z-\lambda}{z} \right)^n = \sum_0^{\infty} \beta_n \left( \frac{z-\mu}{z} \right)^n, \quad 0 < \lambda < \mu,$$

$$\Phi(t) \sim \sum_0^{\infty} \alpha_n L_n(\lambda t) \sim \sum_0^{\infty} \beta_n L_n(\mu t).$$

It is assumed that  $F(z)$  is not analytic at  $z = \infty$ , and the power series converge for  $\Re(z) > \lambda/2$  and  $\mu/2$  resp. The author is mainly interested in the cases (1)  $\sum_0^{\infty} \alpha_n = A$  and (2)  $\sum_0^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$ . The series for  $\Phi(t)$  are then Abel summable or convergent in the mean. His main results are that in case (1)  $\sum_0^{\infty} \beta_n$  converges and  $= A$ , and in case (2)  $\sum_0^{\infty} \beta_n^2$  converges. — The discussion of case (1) is open to serious objections.

On p. 387 the estimate  $zF(z) - A = O(1/z)$  should be  $o(1)$  instead, and the relations (b) and (c) are very doubtful and certainly not proved by Pólya. The statement on p. 390 that  $\Phi_\lambda(t)$  is holomorphic for real  $t > 0$  is erroneous, and the author's argument shows only that  $\sum_0^{\infty} \beta_n$  is Abel-summable to  $A$  which is a priori obvious. But the convergence theorem is true and was proved by Hardy and Littlewood, Rend. Circ. mat. Palermo 41, 50 (1916). *E. Hille (New Haven, Conn.).*

**Doetsch, Gustav:** Beitrag zu Watsons „General transforms“. Math. Ann. 113, 226—241 (1936).

It is shown that by a proper substitution the theory of Watson transforms can be reduced to the theory of convolutions (Faltungen) of Fourier transforms, in which case the result appears as „fast eine Selbstverständlichkeit“. The substitution in question was used also by Watson himself. A reference should be made to a paper by Bochner (this Zbl. 9, 116) where some more general results are obtained by a direct method leading to the theory of Fourier transforms as well. *J. D. Tamarkin.*



**Natanson, I.:** Quelques remarques sur le théorème de Stekloff-Severini. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 2, 215—218 (1936).

The author proves the following theorem. Let  $\Phi_n(t, x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) be a sequence of symmetric kernels with characteristic numbers  $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots$ :  $|\lambda_1^{(n)}| \leq |\lambda_2^{(n)}| \leq \dots$ . Assume

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| g(x) - \int_a^b g(t) \Phi_n(t, x) dt \right\| = 0 \quad \left( \|h(x)\| \equiv \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx} \right) \quad (*)$$

for all  $g(x)$  belonging to a certain class  $\mathfrak{A}$  everywhere dense in the space  $(L^2)$ . The necessary and sufficient condition for (\*) to hold for any  $g(x) \in L^2$  is: zero is not a point of accumulation of the sequence  $\{\lambda_k^{(n)}\}$  (a similar theorem holds for convergence "en mesure"). This theorem is an extension of a theorem of Stekloff-Severini [where

$\Phi_n(t, x)$  has a special form, namely:  $\Phi_n(t, x) = \sum_{k=0}^n \omega_k(x) \omega_k(t)$ ,  $\int_a^b \omega_m(x) \omega_n(x) dx = \delta_{mn}$ ;  $m, n = 1, 2, \dots$ , and  $\mathfrak{A}$  is the class of all polynomials]. The proof is based on the

following lemma. Let  $\Phi(t, x)$  be symmetric, with  $\int_a^b \int_a^b \Phi^2(t, x) dt dx$  finite. Then, for any  $f(x) \in L^2$ ,

$$\left\| \int_a^b f(t) \Phi(t, x) dt \right\| \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \|f(x)\| \quad (1)$$

inequality actually attained, where  $\lambda_1$  is the smallest in absolute value of the characteristic numbers of  $\Phi(t, x)$  (considered as kernel of an integral equation). (1) is readily established by means of Hilbert-Schmidt theorem. *J. Shohat* (Philadelphia).

**Gantmacher, F. R., et M. G. Krein:** Sur les noyaux intégraux du type de fonctions de Green. Trav. Univ. Odessa, Math. 1, 39—48 u. franz. Zusammenfassung 49—50 (1935) [Russisch].

Il s'agit des noyaux qui ont la structure

$$K(x, s) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) \beta_j(s) & x < s \\ \sum_{j=1}^n \gamma_j(x) \delta_j(s) & x > s \end{cases} \quad a \leq x, s \leq b. \quad (*)$$

On s'appuyant sur les résultats de H. Bateman [Messeng. of Math. 37 (1908)] établissant des relations entre les résolvantes et les déterminants  $D(\lambda)$  et  $D^*(\lambda)$  des

noyaux  $K, K^*$  liés par la relation  $K^*(x, s) = K(x, s) + \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) \beta_j(s)$ , les aut. dé-

montrent le théorème: si  $D^*(\lambda_0^*) = 0$ ,  $D(\lambda_0^*) \neq 0$ , le nombre des fonctions fondamentales correspondantes du noyau  $K^*$  est égal au défaut de la matrice  $\|\varepsilon_{jk} - \lambda_0^* \delta_{jk}(\lambda_0^*)\|$ ,

$d_{jk}(\lambda) = \int_a^b \alpha_j(s) \beta_k(s, \lambda) ds$ ,  $\beta_j(x, \lambda)$  vérifiant les équations intégrales:

$$\beta_j(x, \lambda) = \beta_j(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \beta_j(s, \lambda) ds.$$

Applications aux noyaux de Volterra et aux noyaux symétriques, du type (\*); construction de la résolvante et du déterminant. *W. Stepanoff* (Moskau).

**Giraud, Georges:** Équations à intégrales principales d'ordre quelconque. Ann. École norm., III. s. 53, 1—40 (1936).

In einer früheren Arbeit hat sich der Verf. mit einer Klasse von linearen Integralgleichungen der Form  $f(X) + \lambda \int_V \dots \int k(X, Y) f(Y) d\tau_Y = \varphi(X)$  (1)

beschäftigt, falls das Integral in (1) nur als Cauchyscher Hauptwert verstanden werden kann und falls es sich um einfache Integrale oder Doppelintegrale handelt (vgl. dies. Zbl. 11, 216). Nunmehr entwickelt Verf. eine entsprechende Theorie in beliebiger

Anzahl  $m$  von unabhängigen Veränderlichen und weist insbesondere wieder die Gültigkeit der drei Fredholmschen Sätze nach, sobald die komplexe Ebene der  $\lambda$  längs zweier in der imaginären Achse symmetrisch zum Koordinatenursprung liegender Segmente aufgeschnitten wird. Dieses Ergebnis wird auf folgendes Problem aus der Theorie der linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung angewendet (für  $m = 2, 3$  vgl. die frühere Arbeit): eine Lösung  $u$  für solche Differentialgleichungen zu bestimmen, falls am Rande in vorgegebenen nichttangentiellen Richtungen (die sich aber wohl von Punkt zu Punkt ändern können) die Ableitungen bekannt sind. Auch dieses Problem kann verallgemeinert werden.

Schauder (Lwów).

**Giraud, Georges:** Sur un type d'équations à intégrales principales. J. Math. pures appl., IX. s. 15, 193—205 (1936).

Neben der Klasse der Integralgleichungen, mit welchen sich Verf. in seiner Arbeit aus den Ann. Ecole norm., III. s. 53 (1936) — vgl. vorstehendes Referat — beschäftigt, kann eine andere Klasse von Integralgleichungen mit Cauchyschen Hauptwerten betrachtet werden, für welche die drei Fredholmschen Sätze gelten, sobald die ins Unendliche verlaufenden Schnittsegmente auf der reellen Achse der komplexen  $\lambda$ -Ebene liegen.

Schauder (Lwów).

### **Funktionalanalysis:**

**Popovici, C.:** Équations intégral-fonctionnelles et fonctionnelles. (Athènes, 2.—9. IX. 1934.) Actes Congr. Interbalkan. Math. 163—173 (1935).

A résumé of the author's writings and methods in the realm of solutions of functional equations. The point of the argument seems to be that if one is not particular about the definition of a solution of a functional equation either as to range of the solution or the class to which the solution belongs, then various formal methods lead to a wider range of "solutions", than is accessible to the classical methods, because of limitation on the meaning of solution.

Hildebrandt (Ann Arbor).

**Kantorovič, L.:** Über einige Klassen von linearen Operationen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 9—14 (1936).

Vergleich von verschiedenen Stetigkeitsdefinitionen für lineare Operationen. Genaue Wiedergabe der zahlreichen Resultate soll bis zum Erscheinen einer vollständigen Darstellung verschoben werden.

A. Kolmogoroff (Moskau).

**Toscano, L.:** Operatori permutabili di secondo ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 309—312 (1936).

Nach Pincherle heißen zwei lineare Operatoren  $A, X$  assoziiert, wenn die „Abweichung“ (scarto) bei der Vertauschung von  $X$  zu  $A$  der Einheitsoperator ist, d. h. wenn  $AX - XA = 1$ . Wenn  $X$  ein linearer, mit  $A$  vertauschbarer Operator zweiten Grades ist, so ist die Abweichung  $AX - XA$  ein mit  $A$  vertauschbarer Operator  $P$ , und die Operatoren  $A, XP^{-1}$  oder  $A, P^{-1}X$  sind assoziiert. Der Verf. wendet einige Resultate, welche er in vorhergehenden Arbeiten (dies. Zbl. 14, 66) gefunden hat, auf die assoziierten Operatoren an: 1. im Fall, daß die Basis des Raumes gleich  $1, x, x^2, \dots$ , ferner  $A$  die Operation „bestimmte Differenz“  $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$  oder  $\Delta f(x) = f(x) - f(x-1)$ , und  $X$  die Multiplikation mit  $x$ ; 2. im Fall, daß die Basis des Raumes gleich  $1, e^x, e^{2x}, \dots$ , ferner  $A$  die Derivation von  $e^x$  und  $X$  die Multiplikation mit  $e^x$  ist.

G. Lampariello (Rom).

**Cinquini, S.:** Sopra le equazioni funzionali non lineari nel campo analitico. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 483—488 (1936).

Der Verf. behandelt die nichtlinearen analytischen Funktionalgleichungen, indem er Bedingungen sucht, welche die Existenz von Lösungen sichern. Die Untersuchung baut sich auf die Voranalyse einer linearen Funktionalgleichung auf, für welche schon Fantappiè zu den Fredholmschen Sätzen für Integralgleichungen analoge Sätze aufgestellt hat. Eine nichtlineare Gleichung gehört zu folgendem Typus

$$y(z) = F_t[x(t), y(t); z], \quad (1)$$



wo  $F_t$  ein nichtlineares gemischtes analytisches Funktional ist, das von einem Parameter  $z$  und von zwei Funktionen  $x(t), y(t)$  abhängt, von welchen die erste bekannt und die zweite unbekannt ist. — Je nachdem (1) Bedingungen erfüllt, die denen im ersten oder dritten Theorem von Fredholm analog sind, sind die Resultate verschieden. — Im ersten regulär genannten Falle hat die Gleichung eine einzige Lösung, welche man mit der Methode der sukzessiven Approximationen berechnen kann. Im zweiten als Verzweigungsfall bezeichneten Falle hängt die Existenz von einer oder mehreren Lösungen von einem System von  $\nu$  Gleichungen ab, worin  $\nu$  die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der assoziierten linearen Funktionsgleichung ist.

*G. Lampariello* (Rom).

**Trjitzinsky, W. J.:** Linear functionals in the theory of quasi-analytic and D-analytic classes. *Math. Z.* **41**, 493—506 (1936).

Continuing the ideas of a previous paper (this *Zbl.* **10**, 302) the author defines classes of quasi-analytic functions by utilizing the linear functional transformations on  $L^2$  (Lebesgue integrable square functions) on  $0 \leq x \leq 1$  and on  $C$  (continuous functions). If  $\varphi(x, t)$  has the properties:  $\int_0^1 \int_0^1 \varphi(x, t)^2 dx dt < \infty$  and  $\int_0^1 \left( \frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}(x, t) \right)^2 dt < A_n^2$

then  $\int_0^1 \varphi(x, t) a(t) dt = f(x)$  sets up a class of functions having derivatives of all orders. Similarly  $\int_0^1 \varphi(x, t) d\alpha(t)$ ,  $\varphi(x, t)$  and  $\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}$  continuous in  $t$  and uniformly bounded serves

in the class  $C$ .] Application of the Riesz results [*Math. Ann.* **69**, 469—474 (1910); *Ann. Ecole norm. Sup.*, s. 3, **28**, 49—50 (1911)] on systems of integral equations leads to necessary and sufficient condition for analyticity in the senses (a)  $f(x)$  determined by the values of its derivatives at a point; (b)  $f(x)$  determined by its values at a sequence of points on  $0 \leq x \leq 1$  (in this case the existence and properties of the derivatives of  $f$  need not be assumed).

*Hildebrandt* (Ann Arbor).

**Nikolskij, S.:** Lineare Gleichungen im metrischen Raume. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. **2**, 315—319 (1936).

Verf. bemerkt, daß bekannte, sich auf Gleichungen der Form  $x - \lambda A(x) = y$  und ihre adjungierte Gleichungen  $X - \lambda \bar{A}(X)$  beziehende Sätze — unter  $A(x)$  eine vollstetige lineare Abbildung eines Raumes vom Typus  $(B)$  auf seinen Teil verstanden — weiterbestehen bleiben, wenn die Voraussetzung der Vollstetigkeit durch die folgende ersetzt wird: eine gewisse Iteration  $A^i(x)$  von  $A(x)$  ist vollstetig. [Vgl. R. Iglisch *Zies. Zbl.* **9**, 312 für Integralgleichungen der Form  $\varphi(s) + \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(t)$ .]  
*Schauder* (Lwów).

**Hadwiger, Hugo:** Ein Satz über geschlossene Vektorpolygone des Hilbertschen Raumes. *Math. Z.* **41**, 732—738 (1936).

$g_1, \dots, g_N$  seien  $N$  Vektoren des Hilbertschen Raumes mit  $g_1 + \dots + g_N = 0$  und  $|g_i| = 1$ . Trägt man ein  $g_i$  vom Koordinatenanfangspunkt ab und addiert in irgendeiner Reihenfolge die übrigen  $g_j$ , so entsteht ein geschlossenes Vektorpolygon. Verf. zeigt, daß die Reihenfolge stets so gewählt werden kann, daß das Polygon ganz in der Kugel vom Radius  $\varrho_0 = \sqrt{\left[ \frac{N}{2} \right] \left( N - \left[ \frac{N}{2} \right] \right)} / (N - 1)$  liegt. Zu jedem  $N$  wird ferner ein System von Einheitsvektoren angegeben, dessen sämtliche  $N!$  zugehörigen Polygone als Hüllkugel die Kugel vom Radius  $\varrho_0$  haben.  
*G. Köthe*.

**Vulich, B.:** Correction to the note „Some remarks to the theory of  $K$ -normed space“. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. **3**, 109—110 (1936).

Berichtigung eines Fehlers in der im Titel genannten Arbeit (dies. *Zbl.* **14**, 163): im Axiomensystem  $B$  ist das Axiom IV von anderen abhängig, so daß wir in  $B$  nur fünf unabhängige Axiome haben. Das System  $A$  besitzt nur vier unabhängige Axiome.  
*Schauder* (Lwów).

**Variationsrechnung:**

**Manià, Basilio:** Una osservazione sui sistemi differenziali lineari. Boll. Un. Mat. Ital. 15, 118—122 (1936).

The author first establishes a theorem on linear differential equations. Given a set of equations  $y'_i(x) = A_{i\alpha}(x) y_\alpha(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) and a set of solutions  $y_{r,i}(x, \xi)$  such that  $\partial y_{r,i} / \partial x = A_{i\alpha}(x) y_{r,\alpha}(x, \xi)$  and  $y_{r,i}(\xi, \xi) = \delta_{r,i}$ , then  $\partial y_{i,r} / \partial \xi = -A_{\alpha i}(\xi) y_{\alpha r}(\xi, \xi)$ ; and if further  $z_i(\xi)$  is defined by equations  $z_i = \int_{\xi}^b B_r(\tau) y_{i,r}(\tau, \xi) d\tau$ , then

$z'_i(\xi) + A_{\mu i}(\xi) z_\mu(\xi) + B_i(\xi) = 0$  identically in  $i$  and  $\xi$ . This theorem is then applied to the problem of Lagrange. The author has (Ann. di Pisa, V. s. 2, this Zbl. 14, 69, and Lincei Rend., VI. s. 23, this Zbl. 14, 219) established the Euler equation for Lagrange problems and obtained a definite expression for the multipliers  $\lambda$ , but the equation contains some terms not found in the usual formulation of the Euler equation. From the identity proved above we learn that these extra terms vanish identically.

McShane (Virginia).

**Manià, B.:** Le equazioni delle estremanti nei problemi di Lagrange. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 398—405 (1936).

The author treats the problem of extremizing an integral,

$$I_G = \int_0^L G(x, y, x', y', u_1, \dots, u_m) ds,$$

in a class of curves satisfying the differential equations  $u'_i = F_i(x, y, x', y', u_1, \dots, u_m)$  ( $i = 1, \dots, m$ ), where the first end values of the  $u_i$  are prescribed, but the second end values are not prescribed. The Euler-Lagrange multiplier rule is obtained in the form

$$\int_0^s [G_x + \lambda_\alpha F_{\alpha x} + \mu_\alpha F_{\alpha x'}] ds - \frac{d}{ds} \int_0^s [G_{x'} + \lambda_\alpha F_{\alpha x'}] ds = c_1,$$

and a similar equation with  $x$  replaced by  $y$ , where  $\lambda_i(s) = \int_s^L G_{u_\alpha}(\sigma) \lambda_{i\alpha}(s, \sigma) d\sigma$ ,

$\lambda_{ij}(s, \sigma) = \int_s^\sigma F_{j u_\beta}(t) \lambda_{i\beta}(s, t) dt + \delta_{ij}$ ,  $\mu_i = G_{u_i} + \lambda_\beta F_{\beta u_i} + \lambda'_i$ . It is worthy of note

that the expressions given for the multipliers  $\lambda_i$  imply, by the use of certain familiar manipulations, that the functions  $\mu_i$  vanish almost everywhere. By use of this fact the multiplier rule obtained by the author reduces at once to the familiar form. The expressions given for the  $\lambda_i$  imply the transversality conditions  $\lambda_i(L) = 0$ . Except for these transversality conditions, the results which the author presents may be obtained at once from a much more general treatment by the reviewer (see this Zbl. 2, 140).

Graves (Chicago).

**Hestenes, Magnus R.:** On sufficient conditions in the problems of Lagrange and Bolza. Ann. of Math., II. s. 37, 543—551 (1936).

Connecting with an earlier paper (see this Zbl. 10, 306), the author demonstrates the sufficiency of the following properties of an extremal  $g$ , not restricted by normality assumptions (and herein lies their advantage as compared to his earlier results), for a proper strong relative minimum in the problem of Bolza with one variable endpoint: the extremal  $g$  satisfies the transversality condition, the strengthened conditions of Weierstrass and of Clebsch and it contains no focal point of the manifold to which the variable endpoint belongs. Similar sets of conditions have recently been established by Morse (this Zbl. 11, 28) and by Reid (this Zbl. 12, 260). *Dresden.*

**Géhéniau, Jules:** Sur la généralisation de Th. de Donder du théorème d'indépendance de Hilbert. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 32—34 (1936).

This paper does not appear to make any essentially new contribution to results already communicated [Géhéniau, this Zbl. 11, 258, 357; De Donder, this Zbl.



3, 169 (Chap. 10)]. The principal result is briefly as follows.  $F$  is a function of independent variables  $x^i$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ), dependent variables  $y^\alpha$  ( $\alpha, \beta = 1, \dots, m$ ) and their partial derivatives  $y^\alpha_i = \partial y^\alpha / \partial x^i$ . The quantities  $p^\alpha_i$  are defined by  $p^\alpha_i = \partial F / \partial y^\alpha_i$  as functions of  $x^j, y^\beta, y^\beta_j$  and hence  $y^\beta_j$  are known as functions of  $x^i, y^\alpha, p^\alpha_i$ . A Hamiltonian being defined as  $H(x^j, y^\beta, p^\beta_j) = -F + p^\alpha_i y^\alpha_i$ , the extremals  $\delta \int F dx^1 \dots dx^n = 0$  satisfy Hamiltonian equations and there exists a generalized Hamilton-Jacobi equation  $\partial V_{(i)} / \partial x^i + H(x^j, y^\alpha, \partial V_{(j)} / \partial y^\alpha) = 0$  such that if  $V_{(i)}(x^j, y^\alpha, C^{\alpha j})$  are complete integrals, then the equations  $\partial V_{(i)} / \partial y^\alpha = p^\alpha_i, \partial V_{(i)} / \partial C^{\alpha j} = \Gamma^\alpha_{\alpha j}$  define extremals. Here  $C^{\alpha j}$  are constants and  $\Gamma^\alpha_{\alpha j}$  are functions of the  $x^i$  satisfying  $d\Gamma^\alpha_{\alpha j} / dx^i = 0$  and of other constants. By holding  $C^{\alpha j}$  fixed, we get a field of extremals in the  $x, y$  space. For this field  $y^\alpha_i$  are known functions  $\bar{y}^\alpha_i$  of  $x^j, y^\beta$ . Since  $p^\alpha_i \delta y^\alpha$  is an exact differential and also integral invariant with respect to the field of extremals, it follows that

$$\bar{p}^\alpha_i \delta(x^1, \dots, x^{i-1}, y^\alpha, x^{i+1}, \dots, x^n) + (\bar{F} - \bar{p}^\alpha_i \bar{y}^\alpha_i) \delta(x^1 \dots x^n)$$

is an exact  $n$ -uple differential, where in  $\bar{F}$  substitution has been made for  $y^\beta_j$  in terms of  $x^i, y^\alpha$ , and  $\bar{p}^\alpha_i = \partial V_{(i)} / \partial y^\alpha$ . This fact constitutes the generalization of Hilbert's independence theorem.

J. L. Synge (Toronto).

Morse, Marston, and Walter Leighton: Singular quadratic functionals. Trans. Amer. Math. Soc. 40, 252—286 (1936).

Behandelt werden Variationsprobleme für das Integral

$$J(y) = \int_a^b \{r(x) y'^2 + q(x) y y' + p(x) y^2\} dx$$

mit Koeffizientenfunktionen, die an mindestens einem Intervallende singular sind. Sind etwa  $r, q, p$  für  $0 < x \leq b$  eindeutig und stetig,  $r(x) > 0$  und werden alle in  $0 \leq x \leq b$  stetigen  $y(x)$  mit  $y(0) = y(b) = 0$  zugelassen, die in jedem geschlossenen Teilintervall von  $0 < x \leq b$  total stetig sind und eine quadratisch integrierbare Ableitung haben, so wird gefragt, wann für alle diese  $\liminf_{e=0} J(y) \geq 0$  ist. Die Theorie der konjugierten Punkte und das Hilbertsche Unabhängigkeitsintegral wird durch Grenzübergang zum singulären Punkt hin fortgebildet. Als erster konjugierter Punkt zu 0 nach rechts hin wird so die Grenzlage des ersten konjugierten Punktes zu  $a > 0$  für  $a \rightarrow 0$  definiert; er kann mit 0 zusammenfallen. Ist er  $\neq 0$ , so ist er die erste Nullstelle der „Fokallösung“  $w(x)$  der Eulerschen Differentialgleichung, die mit jeder von ihr unabhängigen Lösung  $u(x)$  dieser Gleichung  $\lim_{x=0} \frac{w(x)}{u(x)} = 0$  ergibt. Damit  $y \equiv 0$  im oben definierten Sinne für  $0 \leq x \leq b$  einen „Minimumlimes“ liefert, darf 0 in  $0 \leq x < b$  keinen konjugierten Punkt besitzen. Zur notwendigen und hinreichenden Bedingung wird dies durch die wesentlich neue „Singularitätsbedingung“ ergänzt, daß

$$\liminf_{x=0} \left\{ -r y^2 \frac{u'}{u} - q y^2 \right\} \geq 0$$

ist für jedes zugelassene  $y$ , für das  $\liminf_{x=0} J(y)$  endlich ist, wobei  $u$  eine bei  $b$  verschwindende Lösung der Eulerschen Differentialgleichung ist. Daneben werden einige leichter anwendbare hinreichende Bedingungen angegeben. Eingehender wird der spezielle Integrand  $x^\alpha q(x) y'^2 - x^{\alpha+m-2} k(x) y^2$  mit reell analytischem  $q, k, k(0) \neq 0$  und ganzzahligem  $m \geq 0$  untersucht; als Bedingung für den Minimumlimes ergibt sich hier neben der Aussage über den konjugierten Punkt nur, daß im Falle  $k(0) > 0$   $n > 1$  ist. Darüber hinaus werden Bedingungen für den uneigentlichen Charakter des Minimumlimes aufgestellt (d. h. daß der Wert 0 auch für ein  $y \equiv 0$  angenommen wird), es werden andere Funktionsklassen  $y(x)$  zur Konkurrenz zugelassen, und es wird untersucht, wann für eine andere Extremale  $y \neq 0$  ein analog definierter Minimumlimes eintritt. Unter einer Reihe von Beispielen wird auch eine interessante in den „Inequalities“ von Hardy-Littlewood-Pólya aufgestellte Integralungleichung be-

handelt. Endlich wird die Untersuchung auf Integranden ausgedehnt, die an beiden Intervallenden singular sind. *Hellinger* (Frankfurt a. M.).

**Cinquini, Silvio:** *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di calcolo delle variazioni di ordine  $n$ .* Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 5, 169—190 (1936).

In a given complete class of curves the minimum of  $\int f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$  is sought; it is assumed that all curves of the class have  $y, \dots, y^{(n-1)}$  absolutely continuous. Neighborhoods are defined, based on a distance  $\text{dist}(y_1, y_2)$  which is the same as the usual distance between the multiples  $(y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)})$  and  $(y_2, \dots, y_2^{(n-1)})$ . If  $\partial f / \partial y^{(n)}$  is monotonic increasing for all fixed  $(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ , then the integral is lower semi-continuous (proof to be published in Ann. di Mat.). By methods similar to those of Tonelli it is proved, for example, that if  $\partial f / \partial y^{(n)}$  is increasing and  $|f(x, y, \dots, y^{(n)}) / y^{(n)}| \rightarrow \infty$  as  $|y^{(n)}| \rightarrow \infty$ , then in every complete class of curves in a bounded region there is a minimizing curve for  $\int f dx$ . The hypotheses can be weakened to allow of some exceptional points where  $|f / y^{(n)}|$  does not tend to  $\infty$  and (with supplementary hypotheses) to allow unbounded regions. *McShane*.

**Dudek, Georg:** *Über eine Theorie der Variationsrechnung im Großen bei dem Problem von Lagrange mit Nebenbedingungen.* Breslau: Diss. 1936. 20 S.

**Douglas, Jesse:** *Minimal surfaces of general topological structure with any finite number of assigned boundaries.* J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 15, 105—123 (1936).

In a previous paper ("Two Contours", see this Zbl. 4, 154) the author has solved the problem of Plateau for surfaces bounded by two non-intersecting simple closed curves. Recently (this Zbl. 13, 417) he announced the extension of this result to any number of contours and any prescribed topological structure. The essential condition is, roughly stated, that the lower bound of areas of surfaces of the desired type shall be less than the sum of the two corresponding lower bounds when the set of boundary curves is separated into two subsets. The proof is very largely contained in the paper "Two Contours"; the present paper is an addendum furnishing the two things necessary for the generalization. The first is the definition of Douglas' functional  $A(g; R)$ . This is accompanied with the help of an explicit expression for the Green's function for a half of a symmetric Riemann surface  $R'$  of the desired structure.  $A(g; R)$  depends on the semi Riemann surface  $R'$  and the topological representation  $g$  of the given boundary curves on the boundary of  $R'$ . Now  $A$  is minimized, and the functions constructed which are harmonic on  $R'$  and have the minimizing boundary values  $g$ . By the construction of a special variation, it is proved that these harmonic functions define a minimal surface. The Schottky theorem is a corollary. The extension to the case of curves bounding no surface of finite area is announced. *McShane*.

**Courant, R.:** *On the problem of Plateau.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 367 bis 372 (1936).

Given  $k$  non-intersecting Jordan curves  $\Gamma_i$ , a minimal surface bounded by them is sought — that is, a set of harmonic functions  $\mathfrak{x}(u, v) \equiv (x_1(u, v), \dots, x_n(u, v))$  such that  $\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = \mathfrak{x}_u^2 - \mathfrak{x}_v^2 = 0$  and such that the image of the boundary of the  $(u, v)$  region is the set of curves  $\Gamma_i$ . To solve this, a preliminary problem is solved. — Problem I: We seek that region  $G$  in the  $(u, v)$  plane bounded by  $k$  circles  $C_i$  and that set of functions  $\mathfrak{x}$  on  $G$  which carries  $C_i$  into  $\Gamma_i$  and minimizes  $D(\mathfrak{x}) = \iint (\mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{x}_v^2) du dv$ . We choose a sequence  $(G_n, \mathfrak{x}_n)$  such that  $D(\mathfrak{x}_n) \rightarrow \min$ . If  $k$  is 1 we suppose that all  $G_n$  are the unit circle  $G$  and that all  $\mathfrak{x}_n$  carry three given points on the circumference into three given points on  $\Gamma$ ; also that all  $\mathfrak{x}_n$  are harmonic. It can then be shown that the functions  $\mathfrak{x}_n$  are equicontinuous on the boundary of  $G$ . This leads at once to a solution of Problem I. If  $k = 2$ , we add the hypothesis that  $d < d_1 + d_2$ , where  $d, d_1, d_2$  are the lower bounds of surfaces bounded by  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_1$  alone,  $\Gamma_2$  alone, respectively. The region  $G_n$  can be chosen as the ring between concentric circles of radii  $\rho_1 = 1$



and  $\varrho_2 > 1$ . The condition  $d < d_1 + d_2$  is shown to prevent  $\varrho_2 \rightarrow \infty$ , while the boundedness of  $D(y_n)$  prevents  $\varrho_2 \rightarrow 1$ . There is no longer any three-point condition to ensure equi-continuity of the  $\xi_n$ , but it turns out that equi-continuity too is a consequence of  $d < d_1 + d_2$ . So again Problem I is solvable. It is stated that similar methods are valid for  $k > 2$ . — It remains to show that the solution  $\xi(u, v)$  of Problem I satisfies  $\xi_u \xi_v = \xi_u^2 - \xi_v^2 = 0$ . For this two proofs are outlined. The first depends on  $k$ . When  $k = 1$  we compare  $D(\xi)$  with  $D(\zeta)$ , where  $\zeta(r, \vartheta) = \xi(r, \vartheta + \varepsilon \lambda(r, \theta))$ ; setting the first variation equal to zero and transforming to a contour integral gives  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \int \lambda \cdot 2r \xi_r \xi_\vartheta d\vartheta = 0$ . But  $2r \xi_u \xi_v$  is the real part of  $w^2 \varphi(w)$ , where  $\varphi(w)$  is the analytic function  $2\xi_u \xi_v + i(\xi_u^2 - \xi_v^2)$ ; so it is harmonic, and from the above equation it is zero. Thus  $w^2 \varphi(w)$  is constant, and (evaluating at  $w = 0$ ) it is 0; hence  $\varphi(w) = 0$ , q.e.d. Für  $k = 2$  we cannot evaluate at  $w = 0$ , but the variation of the radii leads to the same conclusion. The second method of establishing the desired equations is independent of  $k$ . A lemma on conformal mapping (see following review) shows that the minimum of  $D(\xi)$  is not lowered if we allow discontinuities along a cut  $c$  such that both sides of  $c$  are mapped on the same curve in  $\xi$  space. This permits us to make a cut inside of  $G$  and vary  $\xi$  on one side only. If  $c$  is a line  $u = \text{const}$  the condition  $\delta D = 0$  is transformable into  $\int \lambda \xi_u \xi_v dv$  for arbitrary  $\lambda$ , hence  $\xi_u \xi_v = 0$ . Taking  $c$  to be  $u - v = \text{const}$  we obtain  $\xi_u^2 - \xi_v^2 = 0$ . McShane (Virginia).

**Courant, R.: On the theory of conformal mapping.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 373—375 (1936).

The following lemma is proved: If the points on the two sides of a cut  $c$  in a domain  $G$  in the complex plane are matched topologically, then  $G - c$  can be conformally mapped on a domain  $B - b$  so that matching points of  $c$  map on coincident points on  $b$ . The lemma has application in the author's treatment of the problem of Plateau (see preceding review). It can be generalized to let  $G$  be a Riemann manifold consisting of regions  $G_i$  bounded by Jordan arcs, some matched topologically; then  $\sum G_i$  can be mapped on a region  $B$  so as to be conformal on each  $G_i$  and continuous on the boundaries and to give matched points the same image. This generalization can be used to establish the least area property of the author's solution of the Plateau problem. McShane (Virginia).

**Weinstein, A.: Sur l'équation des vibrations d'une plaque.** C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 18) 53, 62—64 (1936).

## **Funktionentheorie:**

**Hua, Loo-Keng: Note on boundedly convergent power series.** Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A 3, 345—351 (1936).

Let  $\lambda_0 \neq 0$ ,  $\lambda_\nu \rightarrow 0$  as  $\nu \rightarrow \infty$  and  $h(x)^2 = \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu x^\nu \right)^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu_\nu x^\nu$ . Furthermore, let  $h(x)$  be regular for  $|x| \leq 1$ ,  $x \neq 1$ , and

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |h(e^{i\varphi})|^2 d\varphi = \infty.$$

Then for any function  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  regular for  $|z| < 1$  and satisfying there the condition  $|f(z)| \leq 1$

$$\sum_{\nu=0}^n |\lambda_\nu|^2 - \left| \sum_{\nu=0}^n \mu_{n-\nu} a_\nu \right| \rightarrow \infty$$

holds as  $n \rightarrow \infty$ . This is a generalization of Bohr's result (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1917, 119) which arises for  $\mu_\nu = 1$ . G. Szegö (St. Louis, Mo.).

**Stith Ketchum, Gertrude: On certain generalizations of the Cauchy-Taylor expansion theory.** Trans. Amer. Math. Soc. 40, 208—224 (1936).

L'a. étudie les conditions suffisantes pour qu'une fonction  $f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$ , régulière à l'origine, se laisse développer, dans un cercle de centre origine, en une

série  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n F_n(x)$  (\*), les fonctions  $F_n(x)$ , supposées régulières dans le cercle  $|x| < r$ , étant de la forme

$$F_n(x) = x^n + \sum_{s=1}^{\infty} a_s^{(n)} x^{n+s}. \quad (a_0^{(n)} = 1)$$

— La proposition fondamentale démontrée ici s'énonce comme il suit:  $k_{\mu+\nu}^{(\mu)}$  ( $\mu, \nu \geq 0$ ,  $k_{\mu}^{(\mu)} = 1$ ) étant des nombres complexes quelconques tels que

$$|k_{\mu+\nu}^{(\nu)}| \leq \delta_{\mu+\nu}^{(\nu)} (> 0), \quad \left| \sum_{t=0}^{\nu} k_{\mu+\nu}^{(\mu+t)} a_t^{(\mu)} \right| \leq b_{\nu}^{(\mu)} (> 0),$$

et  $M_{\mu+\nu}^{(\mu)}$  ( $\mu, \nu \geq 0$ ) étant définis par les relations

$$M_{\mu+\nu}^{(\mu)} = b_{\nu}^{(\mu+\nu)} + \text{Max} \left( \frac{\delta_{\mu+\nu+1}^{(\mu)}}{\delta_{\mu+\nu}^{(\mu)}}, \frac{b_{\nu+1}^{(\mu)}}{b_{\nu}^{(\mu)}}, \frac{b_{\nu}^{(\mu+1)}}{b_{\nu-1}^{(\mu)}}, \dots, \frac{b_2^{(\mu+\nu-1)}}{b_1^{(\mu+\nu-1)}} \right),$$

si l'on a

$$\left| \frac{F_n(x)}{x^n} \right| \leq Q (< \infty) \quad \text{pour} \quad |x| \leq R < r,$$

et si la série

$$\sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} |\gamma_{\mu}| M_{\mu+\nu-1}^{(\mu)} M_{\mu+\nu-2}^{(\mu)} \dots M_{\mu}^{(\mu)} \delta_{\mu}^{(\mu)} R^{\mu+\nu}$$

est convergente, alors la fonction  $f(x)$  possède un (et un seul) développement (\*), qui est uniformément convergent dans le cercle  $|x| \leq R$ . — Ce théorème contient comme cas particulier et précise certains résultats de Pincherle [Mem. Acc. Sci. Bologna (4) 3 (1881)], Okada [Tôhoku Math. J. 22 (1922—23)], Takenaka [Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. (3) 13 (1931)]; ce Zbl. 2, 196] et Graesser [Amer. J. Math. 49 (1927)]; quelques développements classiques (procédant suivant les fonctions de Bessel) s'en déduisent aussi.

W. Gontscharoff (Moscou).

**Montel, Paul:** Sur les critères de familles normales. Bull. Sci. math., II. s. 60, 240—246 (1936).

Verf. entwickelt eine Klassifikation der Kriterien für Normalfamilien in Haupt- und Nebenkriterien: Ein Hauptkriterium liegt vor, wenn jede Funktion einer gleichmäßig konvergenten Folge die Bedingung erfüllt, ein Nebenkriterium, wenn es eine glm. k. Folge gibt, die dem betreffenden Kriterium nicht genügt. Die Einteilung ändert sich, wenn man von regulären zu meromorphen Funktionen übergeht oder wenn man die Kriterien einmal im kleinen, das andere Mal im großen anwendet. — Hervorgehoben sei, daß Verf. ein neues Kriterium angibt, das von Massenbelegungen Gebrauch macht, ähnlich wie sie neuerdings in der Wertverteilungslehre mehrfach mit Erfolg herangezogen wurden (vgl. z. B. Ahlfors, dies. Zbl. 11, 259). *Ulrich.*

**Robinson, Raphael M.:** Bloch functions. Duke math. J. 2, 453—459 (1936).

L'auteur donne une propriété des fonctions  $Z = f(z) = z + \dots$ , holomorphes pour  $|z| < 1$ , pour lesquelles la borne supérieure des rayons des cercles à un feuillet du domaine décrit par  $Z$  est minimum; c'est parmi ces fonctions que se trouvent celles fournissant la constante de Bloch. L'auteur montre que ces fonctions admettent le cercle unité comme coupure. La démonstration s'appuie sur une étude élémentaire de la représentation conforme sur un cercle de rayon 1 du domaine simplement connexe formé par la somme des intérieurs de deux cercles sécants privé d'un segment porté par la ligne des centres. Un autre théorème concernant les fonctions univalentes est aussi démontré. [Note du Réf. Les formules de Cauchy montrent que si  $Z = F(z)$  est univalente dans un domaine  $D$  simplement connexe contenant tous les points  $|z| < 1$  et des points de  $|z| = 1$ , si  $F(0) = 0$  et si  $F(z)$  représente  $D$  sur  $|Z| < 1$ , on a  $|F'(0)| < 1$ . Cette proposition conduit, par la méthode de l'auteur, peut-être plus rapidement, au th. sur les fonctions de Bloch.]

G. Valiron (Paris).

**Minetti, S.:** Sulle funzioni olomorfe ammettanti due valori eccezionali finiti e sull'andamento di una funzione olomorfa in prossimità di un punto singolare essenziale isolato. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 488—492 (1936).

The author states a theorem concerning the impossibility of uniform approach to certain limiting values for an analytic function omitting precisely two finite values  $a$



und b. The reviewer was not able to follow the proposed proof of this theorem, the main difficulty occurring on lines 11—15 of p. 490. The author also derives several consequences of this theorem.  
J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

**Rauch, A.:** Extension d'un théorème de MM. Lindelöf et Phragmén. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 189—191 (1935).

**Rauch, A.:** Sur les angles de divergence des fonctions entières. Bull. Soc. Math. France **64**, 71—77 (1936).

Verf. untersucht das Anwachsen ganzer Funktionen  $f(z)$  einer Ordnung  $\rho$  größer als  $1/2$  auf Halbstrahlen  $\arg z = \varphi$  mit Hilfe des Integrals

$$J(f, \varphi, k) = \int_1^{\infty} \log |f(re^{i\varphi})| \frac{dr}{r^{k+1}} \quad (1)$$

und beweist: Divergiert  $J$  für  $|\varphi| < \pi/2\rho$ , während es für benachbarte  $\varphi$  konvergiert, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \rho+0} J(f, \varphi, k) : J(f, 0, k) = \cos \rho \varphi \quad \text{für } |\varphi| \leq \pi/2\rho \quad (2)$$

zugleich mit zwei verwandten Aussagen, die sich auf Mittelwerte über die Bögen beziehen, wo  $|f|=1$  ist, oder auf die Summe  $\sum r_n^{-k}(x)$  für diejenigen  $x$ -Stellen, welche in einem schmalen Winkel um  $\varphi = \pm \pi/2\rho$  angehören; in diesem Fall konnte eine Ausnahmемenge der  $x$  vom linearen Maß Null nicht beseitigt werden. Der Beweis stützt sich auf eine Verschärfung der Ungleichungen im Ideenkreis des Phragmén-Lindelöf'schen Satzes. Wie Verf. dem Ref. brieflich mitteilt, sind die Grenzübergänge in (2) als  $\lim$  für  $k \rightarrow \rho + 0$  zu verstehen, was in den Veröffentlichungen versehentlich unterwähnt blieb; (2) gilt auch, wenn nahe dem Rande, für  $|\varphi| \geq \pi/2\rho$ , das Integral (1) zwar divergiert, aber doch so schwach, daß  $\lim_{k \rightarrow \rho+0} J(f, \frac{\pi}{2\rho}, k) : J(f, 0, k) = 0$  ist. Ullrich.

**Robinson, L.-B.:** Une pseudo-fonction et l'équation d'Izumi. Bull. Soc. Math. France **64**, 66—70 (1936).

L'auteur montre que la solution de l'équation  $u'(x) = a(x)u(x^2)$  (\*) où  $a(x)$  est une fonction entière donnée à coefficients positifs, solution qui existe pour  $|x| < 1$  (Izumi, Jap. J. Math. 1929), admet la cercle  $|x| = 1$  comme coupure. Pour l'établir, s'appuie sur ce que  $x = 1$  est point singulier de la solution, ce qui est bien visible après la transformation  $x = 1 + z$ , et sur ce que  $u(x^{2^n})$  s'exprime en fonction de  $u(x)$ ,  $u''(x)$ , ...,  $u^{(r)}(x)$ . La méthode, donc le résultat, reste valable pour les cas où la solution de (\*) (il s'agit naturellement de la solution définie à un facteur près) admet  $x = 1$  comme singularité. L'auteur annonce qu'il a établi ce point pour les équations de la forme (\*) en supprimant la restriction relative à  $a(x)$  (la démonst. doit paraître dans le Duke Math. J.). [Note du Réf. Si  $a(x)$  est une fonction entière, l'itération de la dérivation de (\*) montre qu'une solution holomorphe pour  $x = 1$  serait méromorphe pour tout  $z$  fini, ce qui est impossible ou égard aux propriétés de la fonction  $T$  de Nevanlinna.]  
G. Valiron (Paris).

**Dinghas, Alexandre:** Sur un théorème de Carleman et sur un théorème de Carlson-Nevanlinna. Bull. Soc. Math. France **64**, 78—86 (1936).

Ausgehend von der Poissonschen Formel für einen Halbkreis wird eine allgemeine, zwischen dem Betrag, den Nullstellen und den Polen einer in einem Winkelraum meromorphen Funktion bestehende Beziehung aufgestellt. Aus dieser Beziehung, welche im wesentlichen mit einer von Carleman gegebenen bekannten Formel (Ark. Mat. Astron. Fys. **17**, Nr 9) übereinstimmt, ergibt sich leicht eine von F. und R. Nevanlinna (Acta Soc. Sci. Fennicae **50**, Nr 5) herrührende Erweiterung des bekannten Satzes von Carlson.  
Rolf Nevanlinna (Göttingen).

**Carbonaro, Carmela:** Sulle funzioni di una variabile biduale totalmente derivabili. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **23**, 839—845 (1936).

Soit  $A$  une algèbre complexe douée de module et d'ordre  $n$ , ayant les unités  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , et  $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$  une fonction  $y(x)$  totalement

dérivable de la variable complexe  $x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$ ; dans le  $S_{2n}$  complexe  $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_{2n})$  on a alors en correspondance une  $V_n$  analytique

$$y_1 = y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), y_2 = y_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, y_n = y_n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

qu'on peut nommer une  $V_n$  caractéristique de l'espace représentatif  $S_{2n}$ . Si l'on fixe dans cet espace un fil analytique  $l$ , existent-il des  $V_n$  caractéristiques qui le contiennent? L'aut. étudie ici cette question, en supposant que  $A$  soit l'algèbre des nombres biduels (ayant  $n = 2$  unités  $u_1, u_2$ , avec le tableau de multiplication

$$u_1^2 = u_1, \quad u_1 u_2 = u_2 u_1 = u_2, \quad u_2^2 = 0);$$

dans cette hypothèse le fil  $l$  appartient à une et une seule  $V_2$  caractéristique, hormis quelques cas exceptionnels bien précisés où il appartient à aucune ou à une infinité de  $V_2$  caractéristiques. Cette proposition et le résultat analogue concernant l'algèbre des nombres bicomplexes [cfr. B. Segre, Rend. Semin. mat. Roma, II. s. 7 (1931), ce Zbl. 3, 213; G. Scorza Dragoni, Mem. Accad. Ital. 5 (1934), ce Zbl. 9, 362; N. Spampinato, Ann. Mat. pura appl., IV. s. 14 (1936), ce Zbl. 13, 102], donnent une réponse complète à ladite question pour le cas  $n = 2$ . *Beniamino Segre* (Bologna).

### **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:**

**Dörge, Karl:** Über das Anwendungsproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Induktionsproblem. Deutsche Math. 1, 475—482 (1936).

Verf. erkennt an und erklärt, daß jeder Versuch einer Umwandlung einer Wahrscheinlichkeitsaussage in eine Häufigkeitsaussage entweder zu einer unentscheidbaren und daher sinnlosen Behauptung führt oder zu einer solchen, die nicht nur durch die folgende Erfahrung widerlegt werden kann, sondern sogar in sich selbst widersinnig ist. Nichtsdestoweniger versucht er diesem Dilemma zu entgehen, indem er die gewöhnliche Annahme, daß „was überhaupt einmal geschehen kann, sofort geschehen kann“, verläßt und so den Begriff der „Möglichkeit“ wesentlich ändert. Geht man von einer mit diesem „Möglichkeits“-Begriff vereinbaren Auffassung der Wahrscheinlichkeitslehre aus, so ist es zulässig, folgendes Postulat des Verf. anzunehmen, das eine einseitig entscheidbare Aussage über den Naturablauf darstellt: Man kann eine Funktion  $\varphi(v)$  setzen, so daß die Abweichung  $|h_v - w|$  zwischen Wahrscheinlichkeit und Häufigkeit nach  $v$  Proben  $\varphi(v)$  nicht überschreiten kann, wenn man sämtliche Experimente mit Wahrscheinlichkeit  $= w$ , die von der Menschheit seit Weltanfang angestellt worden sind, in eine Folge ordnet. Es hängt von unserer persönlichen Vorsicht ab, ob wir  $\varphi(v)$  mehr oder weniger langsam gegen 0 streben lassen; Verf. setzt z. B.  $\varphi(v) = 10/\log v$ .

*Bruno de Finetti* (Trieste).

**De Finetti, Bruno:** Les probabilités nulles. Bull. Sci. math., II. s. 60, 275—288 (1936).

Vortrag über die gegenseitigen Beziehungen der folgenden denkbaren Grundannahmen über die Wahrscheinlichkeiten (W.): 1. einfache und 2. absolute Additivität; 3. daß alle Teilmengen der Grundmenge W. haben und 4. daß für jedes solche Teilmengenpaar eine bedingte W. (als Grundbegriff) definiert ist. (Die Ausdehnung der Definition der bedingten W. auch auf Mengen der W. Null ist an sich möglich, weil in unmittelbar verständlicher Schreibweise stets  $P(A/A+B) + P(B/A+B) = 1 + P(AB/A+B) \geq 1$  ist.) Das übliche Postulat 2 hält Verf. für nicht hinreichend begründet. 2 und 3 zusammen führen zu aus der Maßtheorie bekannten und für die W.-Rechnung absurden Folgerungen, während die Beschränkung auf einen Borelschen Mengenkörper auch nicht zufriedenstellend sei.

*W. Feller* (Stockholm).

**Misès, R. de:** Généralisation d'un théorème sur la probabilité d'une somme infinie. (Athènes, 2.—9. IX. 1934.) Actes Congr. Interbalkan. Math. 201—209 (1935).

Französische Übersetzung einer italienischen Abhandlung des Verf. [vgl. Giorn. Ist. Ital. Attuari 5, 483—495 (1934); dies. Zbl. 10, 311]. *A. Kolmogoroff* (Moskau).



**Cantelli, F. P.:** Considérations sur la loi uniforme des grands nombres et sur la généralisation d'un théorème fondamental de M. Paul Lévy. Ann. Univ. Lyon, Sect. A, Sci. Math. et Astron., III. s. Fasc. 1, 7—29 (1936).

**Mahalanobis, P. C.:** On the generalized distance in statistics. Proc. Nat. Inst. Sci. India 2, 49—55 (1936).

Es wird ein zusammenfassendes Maß für die Entfernung zwischen zwei Gauß-Laplaceschen Verteilungsfunktionen in  $n$  Dimensionen eingeführt und als zufällige Variable betrachtet und näher studiert. *Herman Wold* (Stockholm).

**Jeffreys, Harold:** Further significance tests. Proc. Cambridge Philos. Soc. 32, 416—445 (1936).

After some critical discussion of significance tests in general as applied to problems yielding a statistical difference which may or may not be due to accidental features in the random sampling, the author discusses assessments of the prior probabilities for sampling in a class with a discrete or a continuous range. He treats in particular the case in which the standard error of the samples has a given upper bound. To compare conclusions obtained in practical cases with the ideal results, the author proposes to examine whether the assumptions made lead to the result that whatever the separation of the first two observations may have been, the probability that the third will lie between them is  $1/3$ . Contingency is next considered, extending the results of a previous paper (see this Zbl. 11, 316). Three cases are distinguished, first, when a large class is sampled with respect to several properties at once; secondly, when one seeks statistical evidence as to differences in the composition of several classes separately sampled in respect to various properties; thirdly, when the independence or events is to be rendered plausible on statistical evidence. Explicit formulas are obtained for simple and multiple sampling. Next is examined the representation of a set of observations by assigned functions, polynomials or harmonic functions respectively being taken up in order of their complexity. Applications are made to times of transmission of a longitudinal elastic wave in the earth's crust, to representation of gravitational attraction by spherical harmonics. Tests of randomness are finally applied to the question of whether data gathered by Yamaguti justify an inference that an earthquake in one region of the earth may stimulate one in another region, and to the motion of the node of Venus. *Albert A. Bennett* (Providence).

**Teodorescu, C. C.:** Nouvel emploi des moments d'inertie aux questions statistiques. (Athènes, 2.—9. IX. 1934.) Actes Congr. Interbalkan. Math. 189—195 (1935).

**Craig, Cecil C.:** Sheppard's corrections for a discrete variable. Ann. math. Statist. 7, 55—61 (1936).

By methods analogous to those used in the continuous case Abernethy's results (cf. this Zbl. 8, 218) are deduced and extended to several variables. It follows [cf. also E. B. Wilson, Proc. Nat. Acad. Sci. 13 (1927)] that the Sheppard formulae yield the average correction for equidistant groupings (irrespective of high contact). — Applied as suggested by Abernethy (l. c., p. 264), formula (5) for the continuous case would inversely give author's fundamental formula (4). *Herman Wold*.

**Koller, S.:** Die Analyse der Abhängigkeitsverhältnisse in zwei Korrelationssystemen. Metron 12, 73—105 (1936).

Verf. untersucht zwei Korrelationssysteme unter der Voraussetzung, daß die beiden Systeme zweidimensional sind, und daß ihnen ein einheitliches (physikalisches oder biologisches) Gesetz zugrunde liegt, das von der Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkt der Systeme mit genügender Annäherung wiedergegeben wird. — Es werden Annäherungsformeln für die mittleren Fehler der in Betracht kommenden statistischen Größen abgeleitet. — Die Resultate werden durch verschiedene Anwendungen beleuchtet. *W. Simonsen* (Kopenhagen).

● **Maret, Alfred:** Untersuchungen über diskontinuierlich sich erneuernde Gesamtheiten. Bern u. Leipzig: Paul Haupt 1936. 61 S. u. 2 Taf. RM. 2.40.

**Stumpff, K.:** Über eine Erweiterung des Expektanzbegriffs. Meteorol. Z. 53, 321—327 (1936).

Der Gedankengang einer früheren Untersuchung (vgl. dies. Zbl. 14, 123) wird erläutert und fortgesetzt. Die Anwendung der Theorie auf konkrete Fragen der Periodenforschung stößt auf die tiefliegende Schwierigkeit, daß die Autokorrelationskoeffizienten  $k_\sigma$  empirisch bestimmt werden müssen, während zur Berechnung der Expektanz eine idealisierte Folge der  $k_\sigma$  verwendet werden müßte. Für Luftdruckbeobachtungen wurde mit Erfolg der Grenzfall zwischen schwacher und starker Dämpfung der idealen  $k_\sigma$ -Kurve angesetzt, also  $k_\sigma = (1 + \lambda \sigma) e^{-\lambda \sigma}$ . Die weitere Aufgabe der Expektanztheorie für autokorrelierte Beobachtungsreihen sieht der Verf. darin, die heuristischen Gedankengänge über die ideale Form der Abnahme der  $k_\sigma$  mit wachsender Ordnung  $\sigma$  durch wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen zu stützen; er hält es nicht für ausgeschlossen, daß sich dabei  $k_\sigma = \exp(-\lambda^2 \sigma^2)$  ergeben könnte.  
J. Bartels (Eberswalde).

**Volterra, Vito:** Le principe de la moindre action en biologie. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 417—421 (1936).

**Volterra, Vito:** Sur la moindre action vitale. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 480 bis 481 (1936).

Suite des Notes précédentes de l'auteur [C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1953—1957, 2023—2026, 2113—2116 (1936); ce Zbl. 14, 170, 259]. Soit

$$\int_0^t \left( \sum_1^n \beta_r N_r \log N_r \right) dt \quad \text{„l'action vitale“ et} \quad \sum_1^n \Delta X_r \left( \sum_1^n a_{sr} N_s + \varepsilon_r \beta_r \right)$$

„le travail virtuel d'accroissement“. Le principe de la moindre action vitale démontré par l'auteur s'exprime ainsi: Modifications de manière isochrone le passage naturel d'une association biologique d'un état à un autre, en variant les populations des différentes espèces. L'action vitale augmentera si les quantités de vie à l'instant initial et à l'instant final ne changent pas et si le travail virtuel d'accroissement est nul à chaque instant.

A. Kolmogoroff (Moskau).

**Burkhardt, Felix:** Über die Verbindung des deduktiven und des statischen Forschungsverfahrens mittels mathematischer Denkformen, dargestellt an der Statistik der vor- und nachgeburtlichen Sterblichkeit. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforsch 2, 149—163 (1936).

**Boehm, Carl:** Das Problem der „richtigen“ Sterbetafel. Ein Beitrag zur mathematischen Statistik im Lebensversicherungs-Betrieb. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforsch 2, 164—175 (1936).

**Willers, Fr. A.:** Kritische Punkte und Wahlpunkt in der Erfolgsrechnung. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforsch 2, 181—187 (1936).

## Geometrie.

**Heredia, Enrique:** Einige trigonometrische Beziehungen. Rev. Ci., Lima 38, Nr 116, 97—101 (1936) [Spanisch].

**Johánsson, Ingebrigt:** Nicht-euklidische Elementargeometrie und Trigonometrie. Norsk mat. Tidsskr. 18, 65—82 (1936) [Norwegisch].

**Zacharias, Max:** Ein Satz über trilineare Punktverwandtschaften auf den Seiten eines Dreiecks als Verallgemeinerung des Newton-Gaussischen Satzes vom vollständigen Vierseit. S.-B. Berlin. math. Ges. 35, 17—24 (1936).

Sind  $X_i$  3 Punkte auf den Seiten des Dreiecks  $A_1 A_2 A_3$ , so erfüllen sie die Voraussetzung des Satzes von Ceva, bzw. Menelaus, wenn  $\frac{A_1 X_3}{X_3 A_2} \frac{A_2 X_1}{X_1 A_3} \frac{A_3 X_2}{X_2 A_1} = +1$ , bzw.



$= -1$  ist. Verf. verallgemeinert diese Beziehungen zu der sog. trilinearen Verwandtschaft der Punkte  $X_i$  dadurch, daß er die Konstante  $\pm 1$  durch eine beliebige Zahl  $n$  ersetzt und kurz  $(AX) = n$  schreibt. Zunächst gibt er eine einfache Konstruktion an, die es gestattet, zu 2 gegebenen Verwandtschaften  $(AX) = n_1$ ,  $(AY) = n_2$  die sog. Produktverwandtschaft  $(AZ) = (AX)(AY)$  zu konstruieren. Eine erste Spezialisierung erfährt dieser allgemeine Fall dadurch, daß die Punkte  $X_i$ ,  $Y_i$  als harmonisch zu den Dreieckseckpunkten der Seite, auf der sie liegen, angenommen werden, wobei  $n_1 n_2 = -1$  wird. Bei einer 2. Spezialisierung werden dann die  $X_i$  als Punkte eines Cevatripels angenommen, d. h.  $n_1 = +1$  und  $n_2 = -1$ . In diesem Fall liegen ersichtlich die Punkte  $Y_i$  und  $Z_i$  auf einer Geraden. Da aber als Produkttripel zu gegebenen  $X_i$ ,  $Y_i$  auch die Mitten der Strecken  $X_i Y_i$  auftreten, ist somit ein Satz von Newton-Gauß über das vollständige Vierseit, dessen Diagonaldreieck  $A_1 A_2 A_3$  ist, neu bewiesen worden. Der Schluß enthält noch eine Konstruktion beliebiger Tripel einer trilinearen Verwandtschaft aus gegebenen. *Bureau* (Hamburg).

**Falckenberg, Hans:** Anwendung der Dreiflachstheorie von E. Study auf reguläre Körper und verallgemeinerte konvexe Polyeder. (Vorl. Mitt.) Mh. Math. Phys. 44, 285—289 (1936).

Bekanntlich zerfallen die Studyschen verallgemeinerten Dreiecke der Kugelfläche in zwei getrennte Kontinua. Dieser Satz, der übrigens einen topologischen Grund hat, wird auf sphärische Polygone und auf projektivische Maßbestimmung übertragen. Sodann wird auch für ein Eulersches Polyeder eine dem Übergang vom elementaren zum Möbiusschen und zum Studyschen Dreiecke entsprechende Verallgemeinerung erklärt und der Satz bewiesen, daß die Gesamtheit dieser aus einem Eulerschen abgeleiteten verallgemeinerten Polyeder in  $2^{K+1}$  Klassen zerfällt, die getrennte Kontinua bilden; dabei ist  $K$  die Anzahl der Kanten des Polyeders. *W. Threlfall* (Halle).

**Finsterwalder, Sebastian:** Regelmäßige Anordnungen gleicher sich berührender Kreise in der Ebene, auf der Kugel und auf der Pseudosphäre. Abh. bayer. Akad. Wiss., N. F. H. 38, 1—42 (1936).

Verf. findet 30 verschiedene Anordnungen in der Ebene, 36 auf der Kugel und 49 auf der Pseudosphäre. Ein Vollständigkeitsbeweis wird nicht erbracht. Bzgl. der Anordnungen in der Ebene äußert sich Verf.: „Damit scheinen alle Anordnungen . . . erschöpft. Sie sind im Laufe von 18 Jahren allmählich aufgefunden worden, und es wäre wohl denkbar, daß sich irgendeine meiner Aufmerksamkeit entzogen hat.“ Daß dies tatsächlich der Fall ist, zeigt ein Vergleich mit anderen Arbeiten, die das gleiche Problem behandelten [P. Niggli, Z. Kristallogr. 65, 391 (1927) u. 68, 404 (1928)]. Hinweise auf ähnliche Untersuchungen anderer Autoren sind grundsätzlich vermieden worden. 119 Abbildungen. *F. Laves* (Göttingen).

**Reinicke, R.:** Über die hauptsächlichsten Kristallbauweisen als Erscheinungsformen eines einheitlichen Gestaltungsprinzips. Z. ges. Naturwiss. 2, 152—165 (1936).

Es werden die Beziehungen zwischen den einfachsten Strukturen der Elemente und einiger binärer Verbindungen untersucht und auf die Würfeldarstellung hingewiesen. *W. Nowacki* (Zürich).

**Justinijanović, Juraj M.:** Die Konstruktion der Kegelschnitte, unter deren Bestimmungselementen sich ein konjugiert imaginäres Tangentenpaar befindet. Bull. int. Acad. Yougoslave Sci. Beaux-Arts 29/30, 64—68 (1936).

**Cassina, U.:** Su una nuova costruzione grafica del piano osculatore. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 24, 50—53 (1936).

Es wird durch Rechnung eine überraschend einfache Konstruktion der Schmiegeebene in einem Punkt  $P$  einer durch zugeordnete Normalrisse gegebenen Raumkurve  $c$  bewiesen. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Krümmungsmitten der Bilder von  $c$  in den Bildern von  $P$  gegeben sind. *E. Kruppa* (Wien).

**Bachmann, Friedrich:** Eine Begründung der absoluten Geometrie in der Ebene. Math. Ann. 113, 424—451 (1936).

In einer Arbeit von Podehl und Reidemeister [Eine Begründung der ebenen elliptischen Geometrie. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 10, 231—255 (1934); s. dies. Zbl. 9, 177] wurde im Anschluß an Hjelmslev ohne Anordnung und Stetigkeit mit Hilfe der ebenen Spiegelungen die ebene elliptische Geometrie im großen begründet, also der Fall erledigt, daß jede Gerade einen Pol hat. Ergänzend wird jetzt in entsprechender Weise der Fall behandelt, daß von einem Punkt auf eine Gerade genau ein Lot gefällt werden kann. Die Axiome I der Inzidenz lauten unverändert; die Axiome II des Senkrechtstehens verlangen im Gegensatz zu früher an Stelle von II 4 die Einzigkeit des Lotes; die Axiome III der Kongruenz erfahren durch den Anschluß von polaren Punktpaaren gewisse Modifizierungen. Es werden zunächst mit Hilfe von ebenen Spiegelungen uneigentliche Punkte (Geradenbüschel mit unzugänglichem Schnittpunkt) eingeführt; damit hat man die volle Gruppe der Drehungen um eigentliche und uneigentliche Punkte und die Darstellbarkeit einer beliebigen Folge von Spiegelungen als eine Drehung oder als eine Spiegelung bzw. als Produkt von drei Spiegelungen. Aus den Spiegelungen in der Ausgangsebene werden jetzt analog wie früher (s. oben und Reidemeister, Geometria proiettiva non euclidea; dies. Zbl. 10, 175) abstrakt die Elemente eines projektiven dreidimensionalen kinematischen Raumes erklärt: Ein Punkt wird einer Drehung zugeordnet, der Einheitspunkt der Identität; eine Ebene einer Bewegung, die sich als Produkt von drei Spiegelungen darstellen läßt; eine Gerade einer Gruppe von Drehungen um einen festen Punkt oder einer Nebenklasse nach einer solchen Gruppe innerhalb der Gruppe aller Drehungen. Bei geeigneten Inzidenzdefinitionen gelten dann die Verknüpfungssätze. Die Bewegungen, denen die mit dem Einheitspunkt  $e$  inzidierenden Ebenen ( $R_e$ -Ebenen) bzw. Geraden ( $R_e$ -Geraden) zugeordnet sind, sind Spiegelungen an einer Geraden bzw. die Gruppe der Drehungen um einen Punkt der Ausgangsebene. Durch diese Zuordnung sind die  $R_e$ -Ebenen und  $R_e$ -Geraden umkehrbar eindeutig und inzidenztreu auf die Geraden und (eigentlichen und uneigentlichen) Punkte der Ausgangsebene abgebildet. Folglich ergibt sich in ihr die Gültigkeit des Desarguesschen Satzes mit gewissen Einschränkungen für eigentliche Konfigurationselemente aus der Gültigkeit eines entsprechenden Satzes über perspektive Dreikante im kinematischen Raum und die Gültigkeit des Pappus-Pascalschen Satzes aus einem räumlichen Analogon des Brianchonschen Satzes, das aus der Existenz von Regelflächen in diesem Raume folgt. Mit Hilfe von Halbdrehungen werden endlich uneigentliche Geraden eingeführt und die Gültigkeit der Sätze von Desargues und Pascal für beliebige Konfigurationen mittels eines Transformationsverfahrens bewiesen. Damit ist die Ausgangsebene in eine projektive Ebene eingebettet, und sie kann mit Hilfe eines Körpers algebraisiert werden. Die Einführung einer quadratischen Fundamentalfarm als Maßkegelschnitt soll später behandelt werden. R. Moufang (Frankfurt a. M.).

**Freudenthal, Kurt:** Gemeinsame axiomatische Grundlegung der ebenen Euklidischen, hyperbolischen und elliptischen Geometrie. München: Diss. 1936. 38 S.

**Beck, H.:** Dreidimensionale Geometrien mit einer einzigen unendlich fernen Ebene. S.-B. Berlin. math. Ges. 35, 3—16 (1936).

Ici l'A. obtient une infinité dénombrable de géométries différentes de l'espace ordinaire, dans chacune desquelles le champ des points propres doit être fermé moyennant un seul plan impropre; les espaces qu'on a de la sorte ne résultent néanmoins homogènes, puisque sur le plan impropre il y a — dans chaque cas — une droite lieu de points singuliers (équivalents entre eux, mais) non équivalents aux points restants. En considérant dans  $S_{n+2}$  (avec  $n \geq 2$ ) la  $V_3^n$  obtenible en projectant d'une droite une courbe rationnelle normale appartenant à un  $S_n$  qui n'ait avec elle aucun point commun, on a que cette  $V_3^n$  peut être représentée birationnellement sur l'espace ordinaire de façon que — en correspondance aux transformations



homographiques de  $V_3^n$  en soi-même — on obtienne dans l'espace ordinaire un groupe de transformations définissant une des géométries susdites; les équations cartésiennes de ce groupe sont:

$$\begin{cases} (a_{00} + a_{03}z)^n x' = b_{11}x + b_{12}y + P_1(z) & (a_{00}a_{33} - a_{03}a_{30})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \neq 0, \\ (a_{00} + a_{03}z)^n y' = b_{21}x + b_{22}y + P_2(z) & P_1(z) \text{ et } P_2(z) \text{ polynômes de degré } n \text{ en } z. \\ (a_{00} + a_{03}z) \cdot z' = a_{30} + a_{33}z \end{cases}$$

L'A. étudie spécialement le cas où  $n = 2$ .

*Beniamino Segre* (Bologna).

**Arvesen, Ole Peder:** Une application de la transformation par semi-droites réciproques. *Norske Vid. Selsk., Forh.* **9**, 13—15 (1936).

Anwendung einer bekannten Laguerreschen Transformation (s. Oeuvres de Laguerre, II, 608) auf die Konstruktion eines Kreises, der zwei gegebene Kreise berührt und durch einen gegebenen Punkt  $A$  hindurchgeht. Ausführung der Rechnungen im Falle, wo  $A$  auf der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der beiden Kreise liegt.

*E. G. Togliatti* (Genova).

**Graf, Ulrich:** Zur Möbiusschen und Laguerreschen Kreisgeometrie in der Minimalebene. *S.-B. Berlin. math. Ges.* **35**, 25—34 (1936).

Analog zur Darstellung der gewöhnlichen komplexen Zahlen in der Gaußschen Ebene wird jedem Punkt  $(\xi, \eta)$  einer reellen Grundebene die duale Zahl  $\omega = \xi + \varepsilon\eta$ , wobei  $\varepsilon^2 = 0$ , zugeordnet und weiter jeder Geraden  $\eta = \mu\xi - \nu$  die duale Zahl  $\omega = \mu + \varepsilon\nu$ . Die  $\omega$  erscheinen so entweder als Punkt- oder Geradenkoordinaten, wobei die Elemente gleicher Koordinate durch eine einfache Polarität verknüpft sind. Die Punkte der Grundebene werden nach J. Grünwald als stereographische Projektion der Punkte eines Zylinders  $F^2$  betrachtet und ferner die Geraden als Spuren von Berührungsebenen eines Fernkegelschnittes  $\Pi^2$  (Analogon zur Zyklographie). Die ebenen Schnitte von  $F^2$  projizieren sich dabei als Parabeln gleicher Achsenrichtung, ebenso sind die zyklographischen Bilder der Raumpunkte aus  $\Pi^2$  dieselben Parabeln. Faßt man sie als Kreise einer nichteuklidischen Metrik auf, so erscheint die Grundebene als reeller Repräsentant einer Minimalebene. Die Gleichung  $\varepsilon l \cdot \omega \bar{\omega} + \gamma \omega - \bar{\gamma} \bar{\omega} + \varepsilon m = 0$  (Analogon zur Gleichung der eindimensionalen Kette) stellt nun je nach der Wahl der Koordinaten einen solchen Kreis entweder als Punkt- oder als Geradenort dar. Die eigentlichen Kreisverwandtschaften werden durch die Transformationen  $\omega' = (a\omega + b) : (c\omega + d) = \gamma(\omega)$  dargestellt, welche in Punktkoordinaten die Möbiusgruppe, in Geradenkoordinaten die Laguerregruppe liefern und die völlige Dualität in der Minimalebene zeigen. Die uneigentlichen Kreisverwandtschaften sind durch  $\bar{\omega}' = \gamma(\omega)$  bestimmt. Jeder Kreisverwandtschaft entspricht im Raume eine automorphe Kollineation von  $F^2$  oder  $\Pi^2$ . Schließlich werden besondere Fälle dieser Transformationen genauer untersucht und ihre Invarianten angegeben. *Eckhart* (Wien).

**Freytag, O.:** Die nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformation als Ausschnitt einer Abbildung von F. Aschieri. *Deutsche Math.* **1**, 499—500 (1936).

Ein linearer Strahlenkomplex ordne als Grundkomplex die  $\infty^4$  Strahlen paarweise einander zu. Nach Aschieri können die  $\infty^4$  Paare konjugierter Strahlen den Punkten eines  $R_4$  zugeordnet werden. Einem für den Grundkomplex nullinvarianten Strahlenkomplex entspricht dabei ein  $R_3$  des  $R_4$ , und diese Abbildung des regulären linearen Komplexes auf einen  $R_3$  ist zugleich eine nichteuklidische Gerade-Kugel-Transformation.

*Haenzel* (Karlsruhe i. B.).

**Hartmann, Georges:** Sur certaines propriétés d'une grassmannienne. *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 727—728 (1936).

Es werden die verschiedenen Möglichkeiten aufgezählt, die das Schnittgebilde eines  $R_3$  mit der Grassmannschen Mannigfaltigkeit  $G(n, k)$  der Dimension  $t = (n - k)(k + 1)$  im Raume von  $t = \binom{n+1}{k+1} - 1$  Dimensionen aufweisen kann, wenn der  $R_3$  5 Punkte mit der  $G(n, k)$  gemein hat. Ferner wird angegeben, daß  $p$  Tangential- $R_t$  bei  $k > 3$  stets in einem  $R_{p+t-p-1}$  liegen.

*Bureau* (Hamburg).

**Doetsch, Gustav:** Konvexe Kurven und Fußpunktkurven. Math. Z. 41, 717 bis 731 (1936).

Begriff und bekannte Eigenschaften der Fußpunktkurven (vgl. z. B. Lie, Geometrie der Berührungstransformationen, I., 27—29, Leipzig 1896), werden auf den Fall verallgemeinert, daß von der Ausgangskurve nur die Existenz einseitiger Tangenten vorausgesetzt ist. Eingehender wird der Fall einer konvexen Ausgangskurve (auch für einen außerhalb der Kurve gelegenen Pol) behandelt. Ferner wird der Begriff der Fußpunktkurve in folgendem Sinne verallgemeinert: Unter der zum Winkel  $\vartheta$  gehörigen Strebenendkurve einer Kurve  $\mathfrak{C}$  bezüglich des Punktes  $O$  wird der Ort desjenigen Punktes  $F$  auf der Tangente von  $\mathfrak{C}$  verstanden, für den der Winkel zwischen der Geraden  $OF$  und der Tangente den festen Wert  $\frac{\pi}{2} - \vartheta$  besitzt. Von diesen Kurven

werden einige Eigenschaften bewiesen, die denen der Fußpunktkurven eng verwandt sind. Ref. bemerkt, daß sich diese Resultate unmittelbar aus dem Umstand ergeben, daß die zu  $\vartheta$  gehörige Strebenendkurve durch Drehung um den Winkel  $\vartheta$  und ähnliche Vergrößerung im Verhältnis  $1 : \cos \vartheta$  aus der Fußpunktkurve hervorgeht. *W. Fenchel.*

**Linsman:** Sur les surfaces réglées du troisième ordre en géométrie finie. Bull. Sci. math., II. s. 60, 268—275 (1936).

Verf. betrachtet die geradlinigen (nicht notwendig algebraischen) irreduziblen Flächen 3. linearer (Realitäts-) Ordnung im projektiven  $R_3$ ; dabei werden Differenzierbarkeitsannahmen etwa im Umfange wie bei Juel gemacht. Durch Anwendung der Staudtschen Sätze (denen zufolge zwei ebene Kurven ungerader Ordnung keine gerade Anzahl von Schnittpunkten besitzen und eine Kurve gerader mit einer Kurve gerader oder ungerader Ordnung keine ungerade Anzahl von Schnittpunkten) wird recht einfach bewiesen: Die (irreduziblen) Regelflächen 3. Ordnung  $F_3$  zerfallen in zwei Arten: 1. Die  $F_3$  besitzt genau 2 Leitgeraden, d. h. 2 Geraden  $a, b$ , deren jede von jeder Erzeugenden der  $F_3$  getroffen wird und von denen eine, etwa  $a$ , Doppelgerade der  $F_3$  ist. Durch die Erzeugenden wird  $a$  auf  $b$  1-2-deutig projiziert. — 2. Die  $F_3$  besitzt genau 1 Leitgerade  $c$ , welche Doppelgerade der  $F_3$  ist und in deren Punkten die  $F_3$  zwei Tangentenebenen  $e_1, e_2$  besitzt: die eine, etwa  $e_1$ , ist fest, während die andere,  $e_2$ , ein zur Reihe der Berührungspunkte projektives Ebenenbüschel (mit der Achse  $c$ ) durchläuft. Vermöge der Abbildung der Geraden einer linearen Kongruenz auf die Punkte einer Fläche 2. Ordnung  $F_2$  erhält man als Bild einer  $F_3$  der 1. Art eine Kurve 3. Ordnung („Ordnung“ bezüglich der Ebenen des  $R_3$ ) auf der  $F_2$  und umgekehrt. Analoges gilt für die  $F_3$  der 2. Art. Mit Hilfe der Zentralprojektion der ebenen Schnitte der  $F_2$  (aus einem auf  $F_2$  gelegenen Projektionszentrum) in eine Ebene ergibt sich die Existenz nichtalgebraischer Kurven 3. Ordnung auf der  $F_2$  und damit nichtalgebraischer  $F_3$  aus der Existenz nichtalgebraischer Böhmerscher Ovale. *Haupt.*

**Pauc, Chr.:** Introduction de directions dans un espace distancié. Analyse du contingent et du paratingent du point de vue topologique. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 968—984 (1936).

Dans ce mémoire se trouve le détail des définitions et des démonstrations relatives aux questions traitées dans la note aux Comptes Rendus [C. R. Acad. Sci., Paris 203, 153—155 (1936); comp. ce Zbl. 14, 275]. Les définitions et les résultats sont de deux sortes: 1° Définitions et résultats globaux: L'auteur considère l'ensemble des cordes orientées d'un continu. Le fait que cet ensemble possède deux composants distincts entraîne que le continu est un arc. 2° Définitions et résultats locaux: L'auteur définit pour des espaces métriques généraux un contingent et un paratingent, ce dernier pouvant être en un certain sens orienté. Le fait que le paratingent orienté en un point d'un continu possède deux composants entraîne que le continu est un arc au voisinage de ce point. — Ces résultats apparaissent comme exprimant en quelque sorte le „contenu topologique“ de certains théorèmes de M. Bouligand, *E. Blanc* (Paris).



**Algebraische Geometrie:**

**Turrière, Émile:** Notes sur des courbes spéciales algébriques. An. Fac. Ci. Pôrto 20, 193—208 (1936).

Einige besondere ebene algebraische Kurven, die im Buche von G. Teixeira nicht erörtert sind (sie sind aber fast alle im Buche von G. Loria beschrieben). Folgende Kurven werden ausführlich diskutiert: der Schmetterling von Schwarz; die Meridiankurve eines Drehkörpers, dessen Trägheitsellipsoid eine Kugel ist; die ebenen algebraischen Kurven konstanten Druckes; der Ort der Spitzen der rechten Winkel, die einer Cissoide umschrieben sind. Es folgen einige bibliographische Angaben über weitere Kurven. *E. G. Togliatti* (Genova).

**Dhar, S. C.:** On the uniformization of algebraic curves of genus four. Indian Phys.-Math. J. 7, 47—52 (1936).

Man hat vermutet, daß die Uniformisierende einer hyperelliptischen Funktion  $y^2 = f(x)$  der Differentialgleichung  $\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{3}{16} \left[ \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{2n+2}{2n+1} \frac{f''(z)}{f(z)} \right] y = 0$  genügt, und daß die Transformationsgruppe dieser Differentialgleichung fuchsisch ist. Verf. zeigt dies für die Funktion  $u^2 = 1 + z^9$ , konstruiert die Transformationsgruppe und ihren Fundamentalbereich. *Ott-Heinrich Keller* (Berlin).

**Lemoine, T.:** Théorèmes généraux sur les lieux géométriques et les enveloppes. (59. sess., Nantes, 22.—27. VII. 1935.) Assoc. Franç. Avancement Sci. 135—139 (1935).

Si l'on a sur un plan deux systèmes algébriques simplement infinis de courbes algébriques, rapportés entre eux dans une correspondance algébrique, le lieu des points d'intersection de deux leurs courbes homologues est une courbe algébrique, dont l'ordre s'obtient immédiatement comme application du principe de correspondance de Chasles. De cette remarque préliminaire — d'ailleurs bien connue (cfr., p. ex. H. G. Zeuthen, Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie, p. 180. Leipzig: Teubner 1914) — l'A. tire quelques simples conséquences, qui en partie remontent à Steiner et à Chasles. *Beniamino Segre* (Bologna).

**Bronowski, J.:** Some canonical triple surfaces. Proc. Cambridge Philos. Soc. 32, 366—372 (1936).

A number of new examples of algebraic surfaces whose canonical system is composed of an involution of order 3. They all belong to a series of surfaces of order  $n+3$  ( $n \leq 5$ ) with an  $n$ -fold point at which are concurrent  $\frac{1}{2} n(n-1)$  double lines, the intersections of  $n$  concurrent planes in  $S_3$ . For  $n > 5$ , the general surface of the series is reducible, but particular cases, with coincident double lines, exist which are irreducible. *O. Zariski* (Baltimore).

**Godeaux, Lucien:** Remarque sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 918—923 (1936).

Drei bilineare symmetrische Gleichungen:

$$\sum a_{ik} x_i x'_k = 0, \quad \sum b_{ik} x_i x'_k = 0, \quad \sum c_{ik} x_i x'_k = 0$$
  
( $a_{ik} = a_{ki}$ ,  $b_{ik} = b_{ki}$ ,  $c_{ik} = c_{ki}$ ;  $i, k = 1, 2, 3, 4$ ) definieren im Raume eine wohlbekannte Involution  $I_2$  von Punktpaaren, die eine Fundamentalkurve  $\Delta$  der Ordnung 6 und des Geschlechts 3 besitzt. Es gibt  $\infty^{12}$  Flächen 4. Ordnung, die durch  $\Delta$  hindurchgehen; ihre Gleichungen lauten  $\sum \lambda_{ik} x_i x'_k = 0$ , wo die  $x'_k$  durch die obigen Formeln zu ersetzen sind. Die Annahme  $\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$  führt zu einem durch  $I_2$  zusammengesetzten  $\infty^6$  Linearsystem  $|F_0|$  von Flächen 4. Ordnung; das charakteristische  $\infty^5$  Linearsystem einer beliebigen Fläche  $F_0$  liefert eine Fläche  $F^{10}$  des Raumes  $S_5$ , die als Bild der Punktpaare von  $I_2$  dienen kann. Verf. erhält auch alles Gesagte durch die Abbildung der Punktpaare des Raumes auf die Punkte einer Segreschen  $V_6^{20}$  des  $S_{15}$ . Die gefundene  $F^{10}$ , die schon von G. Fano betrachtet worden ist, hat  $p_a = P_3 = 0$  und  $P_2 = 1$ ; man erhält ihre Gleichungen durch Nullsetzen aller 3reihigen Unterdeterminanten einer symmetrischen Determinante 4. Ordnung, deren Elemente lineare Formen der Koordinaten sind. *E. G. Togliatti* (Genova).

**Enriques, Federico:** Curve infinitamente vicine sopra una superficie algebrica. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 1, 1—9 (1936).

L'A. a donné en 1904 [Rend. Accad. Sci. Istit. Bologna 9, 5 (1904)] le théorème fondamental affirmant que, sur une surface algébrique, un système continu complet de courbes algébriques admet la série caractéristique complète; la démonstration relative — prouvant synthétiquement que, sur une courbe  $C$  générique du système, chaque groupe de la série caractéristique peut être découpé avec une courbe infiniment voisine à  $C$  — a été reconnue insuffisante en 1921 par F. Severi qui, en même temps, a établi le dit théorème par voie transcendante [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., V. s. 30, 296 (1921); sur le sujet cfr. aussi B. Segre, Rend. Circ. mat. Palermo 55 (1931), ce Zbl. 3, 362 et, pour la biographie, F. Enriques, Rend. Semin. mat. Roma, III. s. 1, 61 (1934), ce Zbl. 10, 219]. Dans ce Mémoire [déjà résumé dans Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 459 (1936), ce Zbl. 14, 364] l'A., dans le but de donner pleine validité à sa démonstration primitive, s'occupe de la possibilité d'opérer par somme et soustraction avec deux courbes infiniment voisines sur une surface algébrique. La possibilité analogue concernant deux groupes de points infiniment voisins sur une courbe  $L$  algébrique est obtenue d'abord d'une façon bien nette, en se servant des transformations infinitésimales (dans le sens de S. Lie) engendrant le groupe abélien des transformations birationnelles qui changent en soi-même la variété de Jacobi de  $L$ ; pour l'extension aux surfaces l'A. expose ensuite des considérations délicates, qui — dans certains endroits (p. 7 et 8) — devraient être mieux éclaircies.

*Beniamino Segre (Bologna).*

**Severi, F.: La teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche. I.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 818—823 (1936).

Eine algebraische Korrespondenz  $\infty^r$  zwischen zwei Mannigfaltigkeiten  $M, M'$ , beide von der Dimension  $r$ , heißt von der Valenz Null, wenn einem variablen Punkte  $x$  von  $M$  eine Punktgruppe  $X'$  auf  $M'$  entspricht, die eine Äquivalenzschar durchläuft. Hat  $T$  die Valenz Null, so auch  $T^{-1}$ . Jede Korrespondenz  $T$  von der Valenz Null gehört zu einer Äquivalenzschar, der auch eine Summe von entarteten Korrespondenzen

$$X \times M' + V_1 \times V'_{r-1} + \dots + V_{r-1} \times V'_1 + M \times X'$$

angehört. Ist speziell  $M = M'$ , so kann man den Durchschnitt dieser Summe mit der identischen Korrespondenz  $\Omega$  bilden und erhält so eine Äquivalenzrelation für die Gruppe der Fixpunkte der Korrespondenz  $T$ , aus der insbesondere die Zahl der Fixpunkte entnommen werden kann. Beweise enthält die Note nicht.

*van der Waerden (Leipzig).*

**Severi, F.: La teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche. II.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 921—925 (1936).

In Fortsetzung der Note I (s. vorst. Ref.) werden Korrespondenzen  $T$  von der Valenz  $\gamma$  eingeführt, das sind solche, für welche  $T + \gamma\Omega$  die Valenz Null hat. In der Fixpunktsformel für solche Korrespondenzen kommt ein Term  $(\Omega, \Omega)$  vor, der nach Comessati (vgl. dies. Zbl. 6, 127) auch als  $(-1)^r S(M)$  gedeutet werden kann, wo  $S(M)$  die Severische Punktgruppenschar von  $M$  ist. Jede beliebige Korrespondenz  $\infty^r T$  kann nun mittels der festen Korrespondenzen  $T_1, \dots, T_s$  durch eine rationale Äquivalenz

$$T \equiv X \times M' + V_1 \times V'_{r-1} + \dots + V_{r-1} \times V'_1 + M \times X' \\ + \sum_{i=1}^s \lambda_i (T_i - X_i \times M' - M \times X'_i)$$

ausgedrückt werden, aus der sich auch die Fixpunktszahl von  $T$  ergibt. — Alle diese Sätze können auch auf Korrespondenzen  $\infty^{r+\lambda}$  ausgedehnt werden; der Wortlaut ändert sich dabei kaum. — Schließlich wird noch bemerkt, daß das Zeuthen-Severische Korrespondenzprinzip für algebraische Flächen nicht auf alle Korrespondenzen mit einer Valenz im Sinne von Albanese anwendbar ist. *van der Waerden (Leipzig).*



**Todd, J. A.:** On a quartic primal with forty-five nodes, in space of four dimensions. Quart. J. Math., Oxford Ser. 7, 168—174 (1936).

Die hier betrachtete  $V_3^4$  eines Raumes  $S_4$  ist schon von A. B. Coble [Amer. J. Math. 28, 333—366 (1906); Trans. Amer. Math. Soc. 18, 331—372 (1917)] untersucht worden; ihre Doppelpunkte führen zu einer Konfiguration von 45 Punkten und 40 Ebenen, die schon bei H. Burckhardt [Math. Ann. 38, 161—224 (1891)] zu finden ist. Hier beweist Verf., daß die  $V_3^4$  rational ist und daß ihre Abbildung auf einen Raum  $S_3$  durch das  $\infty^4$  Linearsystem aller  $F^4$  geliefert wird, die 10 geeignete Geraden enthalten. Solche 10 Geraden sind: die 5 Seiten  $AB, BC, CD, DE, EA$  eines einfachen windschiefen Fünfseits und 5 weitere Geraden  $A\alpha, B\beta, C\gamma, D\delta, E\varepsilon$ , die ein zweites einfaches windschiefes Fünfseit bilden und die  $A, B, C, D, E$  mit 5 bzw. auf  $CD, DE, EA, AB, BC$  liegenden Punkten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  verbinden; wenn  $A, B, C, D, E$  gegeben sind, gibt es noch zwei Möglichkeiten für die Wahl von  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ . Die Eigenschaften der Konfiguration der Doppelpunkte der  $V_3^4$  erhält man leicht aus dem abbildenden Linearsystem. Gleichzeitig kann man auch beweisen, daß die Gruppe  $G_{25 \cdot 920}$  der Kollineationen, die die  $V_3^4$  in sich selbst überführen, durch nur zwei Operationen mit der Periode 5 erzeugt werden kann. Verf. äußert die Meinung, daß jene  $V_3^4$  wahrscheinlich die höchstmögliche endliche Anzahl von getrennten Doppelpunkten aufweist.

*E. G. Togliatti (Genova).*

**Snyder, Virgil, and Evelyn Carroll-Rusk:** The Veneroni transformation in  $S_n$ . Bull. Amer. Math. Soc. 42, 585—592 (1936).

Die Hyperflächen  $V_{n-1}^n$  eines Raumes  $S_n$ , die durch  $n+1$  Unterräume  $S_{n-2}$  allgemeiner Lage hindurchgehen, definieren eine Cremonasche Verwandtschaft, die den Namen von E. Veneroni erhalten hat (s. dies. Zbl. 14, 228—229). Hier werden die  $n$  bilinearen Gleichungen der Transformation bestimmt; die Rechnungen sind nur im Falle  $n=5$  kurz angedeutet. Die Basismannigfaltigkeit des definierenden Systems besteht aus den  $n+2$  gegebenen Räumen  $S_{n-2}$  und aus allen Geraden, die sie treffen; solche Geraden bilden eine  $V_{n-2}$  der Ordnung  $\frac{1}{2}(n+1)(n-2)$ . Die Gebilde, die den Unterräumen  $S_1, S_2, S_3$  von  $S_n$  entsprechen, werden auch untersucht. *E. G. Togliatti.*

### Differentialgeometrie:

**Kimpara, Makoto:** Sur les lignes asymptotiques d'une surface non réglée. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 18, 349—352 (1936).

Nouvelle construction de l'arête de Green et interprétation géométrique de quelques invariants projectifs connus d'une surface. *Beniamino Segre (Bologna).*

**Mitrinovitch, Dragoslav S.:** Asymptotiques d'une classe des surfaces. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 948—950 (1936).

L'auteur cherche les surfaces  $z = F(x, y)$  dont les asymptotiques sont déterminées par l'équation  $\varphi(y) y'^2 + 2y' + f(x) = 0$  (\*). La solution est donnée par l'intégrale complète avec 4 constante arbitraires. Examen des cas d'intégrabilité de (\*).

*S. Finikoff (Moscou).*

**Behari, R.:** On Levi-Civita's „anormalità“ of a rectilinear congruence. Indian Phys.-Math. J. 7, 53—55 (1936).

Si  $M(x, y, z)$  est un point générique d'une surface  $S$  et  $XY, Z$  — les cosinus directs du rayon de la congruence  $C$  qui passe par  $M$ , l'„Anormalità“  $A$  de  $C$  de M. Levi-Civita [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., V. s. 9, 186 (1900)] est défini par l'équation  $AX = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$ . L'auteur montre que  $A$  est lié avec l'invariant  $p$  qu'il a introduit antérieurement (ce Zbl. 11, 271) par la relation  $\frac{dp}{d\sigma} = A \frac{eg - f'f'}{EG - F^2}$  où  $d\sigma$  est l'élément d'aire de la représentation sphérique de  $S$  et  $E, F, G, e, f, f', g$  — les coefficients des deux formes de Kummer de  $C$ .

*S. Finikoff (Moscou).*

**Mengoni, Othmar:** Die konforme Abbildung gewisser Polyeder auf die Kugel. *Mh. Math. Phys.* **44**, 159—185 (1936).

The paper is a contribution to the problem of the conformal mapping of simply connected closed polyhedrons upon the sphere. According to H. A. Schwarz, this problem can be reduced to the determination of a number of constants from a set of transcendental equations. The author shows that on this basis the explicit solution can be determined in a number of cases not considered by Schwarz. The paper concludes with a discussion of the results from the point of view of numerical computations.

*Tibor Radó* (Columbus).

**Caccioppoli, R.:** Sulla rappresentazione conforme delle superficie. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **23**, 287—292 (1936).

A continuous surface  $S$ , of the topological type of the circular disc, will be called internally regular (internamente regolare) if it admits of a parametric representation  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  with the following properties. (1) The preceding equations establish a one-one and continuous correspondence between  $S$  and the disc  $u^2 + v^2 \leq 1$ . (2)  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  have continuous derivatives of the first and second order in  $u^2 + v^2 < 1$ . (3) In  $u^2 + v^2 < 1$  we have  $EG - F^2 > 0$ , where  $E, F, G$  have the usual meaning. (4) The area of  $S$  is finite. Under a supplementary condition to be stated in a moment, the author proves the existence of a map of  $S$  upon  $u^2 + v^2 \leq 1$  which is one-one and continuous for  $u^2 + v^2 \leq 1$  and conformal for  $u^2 + v^2 < 1$ . The proof is based upon the use of smooth approximating surfaces, and in its details it is closely related to some of the recent work on the problem of Plateau and on the theory of the area of surfaces and of their generalized conformal maps. The method used leads naturally to the following supplementary condition. Let  $Q$  be a point on the boundary of  $S$  and denote by  $A(\varrho; Q)$  the area of that portion of  $S$  which is contained in the sphere of centre  $Q$  and radius  $\varrho$ . Then  $\limsup A(\varrho; Q)/\varrho^2 < +\infty$  for every point  $Q$  on the boundary of  $S$ . The paper concludes with remarks concerning generalized conformal maps of surfaces which do not satisfy the preceding assumptions.

*Tibor Radó* (Columbus).

**Scorza Dragoni, G.:** A proposito di un teorema di Caccioppoli sulla rappresentazione conforme delle superficie. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **23**, 557—565 (1936).

The purpose of the paper is to exhibit a surface  $S$  with the following properties. (1)  $S$  is of the topological type of the circular disc and it is internally regular (see the preceding review). (2) Take three points  $P, O, Q$  on the boundary of  $S$ , close to each other, and such that  $P$  and  $Q$  are on different sides of  $O$ . Take also an arc  $C$  which joins  $P$  and  $Q$  on  $S$ . Denote by  $l(O)$  the greatest lower bound of the length of  $C$  for fixed  $O$  and for all possible choices of  $C$  and of  $P, Q$  in the vicinity of  $O$ . Then there exists a point  $O$  on the boundary of  $S$  for which  $l(O) > 0$ . According to Caccioppoli, such a surface cannot possess a representation upon  $u^2 + v^2 \leq 1$  which is one-one continuous in  $u^2 + v^2 \leq 1$  and conformal in  $u^2 + v^2 < 1$ . It follows that the existence of such a representation can be established only if the assumption of internal regularity is supplemented by some further condition (see the prec. rev.).

**Oberti, Guido:** Su una decomposizione caratteristica dei tensori doppi. *Ist. Lombardo, Rend.*, II. s. **69**, 397—402 (1936).

**Cartan, Élie:** Sur une dégénérescence de la géométrie euclidienne. (59. sess., *Nantes*, 22.—27. VII. 1935.) *Assoc. Franç. Avancement Sci.* 128—130 (1935).

Le groupe linéaire  $X = kx + a$ ,  $Y = cx + y + b$

peut être pris comme base d'une géométrie plane ayant la direction de l'axe des  $y$  comme direction „isotrope“ ou privilégiée; géométrie qui est, en un certain sens, une dégénérescence de la géométrie euclidienne. En posant:

$$ds^2 = \frac{dx^2 dy - dy^2 dx}{dx},$$



$ds$  résulte invariant pour le groupe envisagé et peut donc être pris comme élément d'arc (nul pour les droites); on peut de même introduire la courbure

$$k = \frac{d^2 x}{ds^2} : \frac{dx}{ds},$$

et écrire des formules analogues à celles de Frenet. — Le groupe susdit est le plus grand groupe qui laisse invariante l'intégrale  $\int \sqrt{y''} dx$  (où, suivant l'usage,  $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$ ); il peut être lié à l'étude des propriétés géométriques, intrinsèquement attachées à une intégrale de la forme:

$$\int \sqrt{\frac{y'' + \varphi(x, y, y')}{\psi(x, y) y' + \chi(x, y)}} dx. \quad \text{Beniamino Segre.}$$

## Astronomie und Astrophysik.

**Chazy, Jean:** Sur le calcul approché de la précession des équinoxes. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 455—457 (1936).

**Koebeke, F.:** Sur le calcul des éphémérides des satellites de Jupiter. Acta Astron. Ser. c. 2, 145—149 (1936).

L'auteur simplifie le calcul des éphémérides des anciens satellites de Jupiter, en appliquant la méthode des cracoviens et faisant usage de plusieurs tables auxiliaires. *Autoreferat.*

**Bemporad, G.:** Sullo sviluppo delle orbite dei sistemi binari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 850—852 (1936).

Verf. zeigt, daß Bahnen mit einer geringen Zahl von Apsiden, wie sie Schelling (dies. Zbl. 13, 230) für möglich gehalten hat, nicht vorkommen können, wenn nur die Anfangsexzentrizität nicht allzunahe an 1 ist. *G. Schrutka (Wien).*

**Zwicky, F.:** Characteristic temperatures in super-novae. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 557—561 (1936).

The paper attempts to give some estimates of the temperature  $T_s$  at the "surface of separation"  $\Sigma_s$  in a super-nova (which surface defines the demarkation between the gases which are ejected into interstellar space and that matter which remains with the central star). Two different methods of estimating this temperature are discussed; they give

$$T_s > 4,4 \cdot 10^5 / r_s^{3/4},$$

$$T_s > 2,5 \cdot 10^5 / r_s^{1/2}$$

(where  $R_s = r_s \times 10^{13}$  cm), respectively. The possibility of applying Zanstra's theory of nebular envelopes for the estimation of  $T_s$  is briefly discussed; the application of this theory to super-novae is however not yet possible. The paper moreover contains a discussion of the various factors contributing to the total energy liberated during a super-nova outburst. *Steensholt (Bergen).*

**Rosseland, S.:** On the theory of rotating stars. I. Astrophys. Norvegica 2, 173 bis 191 (1936).

The main purpose of this work is to study the constitution of rotating stellar models in which the angular velocity is not restricted to be constant, as has been done in previous work. By standard methods it is shown that the temperature  $T$  in such a model satisfies the equation

$$\nabla^2 T = - \frac{16\pi \varepsilon a m}{3Kk(\nu-3)} \cdot T^3 - \frac{4\pi \varepsilon}{K} F(R) \cdot T^\nu, \quad (1)$$

if the conductivity  $K$  and the energy-generation  $\varepsilon$  are constant,  $a, m, k$  have their usual meanings, and  $\nu$  is a new constant defined in terms of the others. In (1),  $F(R)$  is an arbitrary function of the cylindrical radius vector  $R$  measured from the axis of rotation. The angular velocity  $W$  is then given by

$$W^2 = \frac{2k}{m} \cdot \frac{T^{\nu+1}}{P} \cdot \frac{\partial F}{\partial (R^2)}. \quad (2)$$

The author treats first the slow rotation of a polytropic star of index 3, in which  $T$  can be calculated to a first approximation by taking  $F = 0$ . Other cases are called "generalized polytropic stars", and are treated by first transforming to zero-dimensional variables. It is shown that there does not exist a mass-luminosity law of Eddington's type for these stars. Further, for certain values of the parameters there is a density maximum away from the centre. The results are illustrated by numerical calculations and graphs. The theory demands a considerable increase of angular velocity with depth. The author then considers the rotational stability of these models, and shows the existence of an equatorial zone of instability. Finally he suggests a connection between this instability and the phenomenon of sunspots. *W. H. McCrea (Belfast).*

## Quantentheorie.

● **Hopf, Ludwig: Materie und Strahlung (Korpuskel und Feld).** (Verständl. Wiss. Bd. 30.) Berlin: Julius Springer 1936. VIII, 162 S. u. 56 Abb. geb. RM. 4.80.

**Destouches, Jean-Louis: La notion de grandeur physique.** J. Physique Radium, VII. s. 7, 354—360 (1936).

Die Arbeit enthält in axiomatischer Form allgemeine Betrachtungen über physikalische Größen und Gesetze. *O. Klein (Stockholm).*

**Schrödinger, E.: Probability relations between separated systems.** Proc. Cambridge Philos. Soc. 32, 446—452 (1936).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 12, 427) wird ein Theorem über quantenmechanische „Mischungen“ abgeleitet, woraus geschlossen wird, daß ein Beobachter einem System eine endliche Wahrscheinlichkeit für den Übergang in einen beliebigen Zustand erteilen könnte, ohne das System selbst zu berühren. Es wird die Vermutung ausgesprochen, daß man es hier mit einem von der unrelativistischen Natur der heutigen Quantenmechanik herrührenden Paradoxon zu tun hat. *Klein.*

**Proca, A.: Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs.** J. Physique Radium, VII. s. 7, 347—353 (1936).

Die Arbeit gibt eine zusammenfassende Darstellung der Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 14, 88 u. 184) über eine relativistische, vektorielle Wellengleichung. *Klein.*

**Wick, G. C.: Sulla diffusione dei neutroni lenti.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 774—782 (1936).

Behandlung der Aufgabe: Ein Bündel von Neutronen thermischer Geschwindigkeit fällt auf die ebene Begrenzung eines Paraffinblocks, der als in Tiefe, Länge und Breite unbegrenzter Halbraum schematisiert wird; gesucht die Zahl der Neutronen, die wieder die Oberfläche verläßt, ferner das Intensitätsverhältnis der herauskommenen und der auftreffenden Neutronen, wie es durch künstliche Radioaktivität, etwa einer Silberfolie, gemessen wird. Die Boltzmannsche Stationaritätsbedingung der klassischen statistischen Mechanik wird angeschrieben. Die entstehende Integrodifferentialgleichung wird (unter vereinfachenden Annahmen über den Stoß langsamer Neutronen) mit der Gaußschen Integrationsmethode (Näherung durch Kugelfunktionen) gelöst. Untersuchung der Winkelverteilung der Neutronen, die aus einem Paraffinblock kommen, in dem sich eine Neutronenquelle befindet. *Bechert (Gießen).*

**Heredia, Enrique: Über die Differentialgleichung des Elektrons im Wasserstoffatom, mit und ohne Reibungswiderstand.** Rev. Ci., Lima 38, Nr 116, 77—89 (1936) [Spanisch].

**Nordheim, Lothar: Théorie des chocs et du rayonnement pour les énergies élevées. (Freinage et rayonnement des particules constituant les rayons cosmiques; création et destruction de la matière.)** Ann. Inst. H. Poincaré 6, 1—106 (1936).

Die Arbeit enthält eine ausführliche zusammenfassende Darstellung der heutigen relativistischen Theorie der Strahlungs- und Stoßprobleme. Nach einer Einleitung



über die Grundlagen der Theorie werden sämtliche in erster bis zu vierter Näherung möglichen Prozesse systematisch aufgezählt. Im zweiten Teil werden die wichtigsten dieser Prozesse im einzelnen behandelt und ihre physikalischen Konsequenzen besprochen.

*Casimir (Leiden).*

## Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

**Coulomb, J.: Début des ondes de Love et de Rayleigh.** Jubilé de Marcel Brillouin 190—202, Paris: Gauthier-Villars (1935).

Starting with classical results concerning plane Love waves in a homogeneous layered medium, the author studies the initiation of annular surface waves from a localized source. In analogy with results for the classical case, the wave velocity is expressed as a power series in the reciprocal square of the wave length, the coefficients of which are dependent upon the nature of the heterogeneity of the medium. The surface motion is expressed as an infinite integral involving Bessel functions. The prescribed initial displacements are satisfied by the aid of the Fourier-Bessel inversion formula. The integral for the surface motion is simplified by approximations of essential physical validity, and upon further specialization the formula obtained by Jeffreys (see this Zbl. 2, 318) by more elaborate methods is reproduced. The same methods are next applied in a discussion of the initiation of Rayleigh waves from a localized source, and their dispersion in a layered medium. The connections between the theoretical results and certain observations concerning seismic surface waves are indicated.

*Louis B. Slichter (Cambridge, Mass.).*

**Thorade, H.: Die Gezeiten in neuer Beleuchtung. (Besonders nach H. Solberg.)** Ann. Hydrogr. 64, 381—386 (1936).

Referat über H. Solbergs neue dynamische Gezeitentheorie, in dem bei der geschichtlichen Darstellung von der Entwicklung der bisher vorliegenden Gezeitentheorien besonders auf die zwar allgemein bekannte, aber bisher vielleicht zu wenig gewürdigte Tatsache hingewiesen wird, daß die Laplacesche Theorie die vertikale Beschleunigungskomponente gegenüber der horizontalen vernachlässigt. Hieran knüpft Solbergs neue dynamische Theorie an, die für eine Betrachtung der Gezeiten über den großen Weltmeeren eine Mithberücksichtigung der Vertikalkomponente fordert, da Solberg im Verein mit V. und I. Bjerknes und Bergeron nach der theoretischen Entdeckung der zellularen Trägheitswellen in der Nichtbeachtung der Vertikalkomponente einen ernststen Fehler der Laplaceschen Theorie erkannt hat. Das Referat erläutert sodann an Beispielen den Begriff der zellularen Trägheitswellen und bespricht hierauf die neue dynamische Theorie Solbergs, die sich derzeit nur mit den freien Schwingungen eines die ganze Erde bedeckenden Weltmeeres befaßt und von diesen nur jene vollständig untersucht, deren Periode kürzer als ein halber Sterntag ist; allerdings sind wenigstens teilweise auch die Eigenschwingungen von der Periode eines halben Sterntages schon der Untersuchung zugeführt worden. Da die zellularen Trägheitswellen erst bei Perioden von mehr als einem halben Sterntag auftreten, wird man von den älteren Theorien stärker abweichende Ergebnisse bei den Tiden kurzer Periode natürlich kaum erwarten dürfen. Erst der von Solberg in Aussicht gestellte zweite Teil seiner Theorie dürfte demnach über ihre Tragweite ein abschließendes Urteil erlauben.

*Hoptner (Wien).*

**Hidaka, Koji: Change of water level in an enclosed sea due to a temporary wind.** Geophys. Mag. 9, 279—284 (1935).

Verf. untersucht die durch einen raumzeitlich variablen Tangentialdruck des Windes entstehende Deformation ( $\zeta$ ) der Wasseroberfläche eines rechteckigen Kanals der Länge  $a$  und Tiefe  $h$ . Bei vorgegebenem Tangentialdruck

$$-\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = T(x, t) = F(t) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (1)$$



ist die Lösung der hydrodynamischen Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dz \quad (2)$$

mit den Grenzbedingungen  $u_{x=0} = u_{x=a} = u_{z=h} = 0$ ,  $u_{t=0} = 0$ ,  $\zeta_{t=0} = 0$  durch

$$\zeta(x, t) = \Phi(t) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (3)$$

gegeben, wobei die Amplitudenfunktion  $\Phi(t)$  die Lösung einer Volterraschen Integralgleichung 2. Art darstellt. In Form graphischer Darstellungen werden die numerischen Ergebnisse von (3) für die Fälle  $k = 1/2, 1, 2$  der Amplitudenfunktion des Tangentialdrucks

$$F(t) = T_0 \sin(k\sigma t), \text{ für } 0 < t \leq \pi/k\sigma, \\ F(t) = 0, \text{ für } \pi/k\sigma < t < \infty$$

für verschiedene Werte des Parameters  $q = h \sqrt{\frac{\rho \sigma}{2\mu}}$  dargestellt, worin  $\sigma$  die Merian-Frequenz der Grundschwingung für  $\mu = 0$  bedeutet. H. Ertel (Berlin).

**Gordov, A.:** Zur Theorie einiger Erscheinungen in der realen Atmosphäre. Gerlands Beitr. Geophys. 48, 131—150 (1936).

Als Zerstreuungsfunktion  $\Gamma$  der nicht nur aus Molekülen, sondern auch aus suspendierten Teilchen bestehenden Atmosphäre wird

$$\Gamma = \frac{\mu}{\lambda^n} (1 + p \cos \varphi + q \cos^2 \varphi)$$

gewählt ( $\mu$  Streuungskoeffizient,  $n$  Parameter der Abhängigkeit von der Wellenlänge  $\lambda$ ,  $\varphi$  Streuwinkel,  $p$  und  $q$  aus den Beobachtungen zu bestimmende Konstanten). Daraus ergibt sich für den Extinktionskoeffizienten  $k$  durch Integration über den Öffnungswinkel  $\omega$

$$k = \frac{\mu}{\lambda^n} 4\pi (1 + q/3).$$

Der von oben und von unten kommende Energiestrom wird beim Durchsetzen der homogenen Schicht der Dicke  $dx$  folgendermaßen geändert: 1. durch Zerstreuung der direkten Strahlung, 2. und 3. durch Zerstreuung der von oben und unten kommenden schon zerstreuten Strahlung, 4. und 5. durch Schwächung des oberen Energiestromes infolge Zerstreuung und Absorption in der Schicht  $dx$ . Das auf diese Weise gewonnene System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung für die auf- und abwärts gehenden Energieströme läßt sich integrieren. Dann können  $p$  und  $q$  aus der Helligkeitsverteilung am Himmel bestimmt werden. Der abwärts gehende Energiestrom nimmt fast linear mit der Albedo der Erdoberfläche zu und nimmt ab mit zunehmendem Absorptionskoeffizienten; und zwar ist die Änderung um so langsamer, je größer der Absorptionskoeffizient. Für die in den Weltraum zerstreute Energie gilt eine ähnliche Abhängigkeit. Mittels Beobachtungen von einem bestimmten Tage wird die praktische Anwendbarkeit der Methode dargetan. B. Haurwitz (Toronto).

**Solberg, H.:** Schwingungen und Wellenbewegungen in einer Atmosphäre mit nach oben abnehmender Temperatur. Astrophys. Norvegica 2, 123—172 (1936).

Verf. geht aus von der Lagrangeschen Form der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen, welche er nach der Methode der kleinen Störungen linearisiert. Unter der Annahme, daß alle auftretenden ungestörten physikalischen Größen allein von der vertikalen Komponente abhängen sollen, erhält man mit exponentiellem Ansatz für alle Veränderlichen eine gewöhnliche homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Druckamplitude, deren Integrale unter Beachtung der folgenden Randbedingungen: Verschwinden der Vertikalkomponente an einer starren Grenzfläche, Verschwinden des Störungsdruckes an einer freien Oberfläche, stetiger Übergang von



Vertikalkomponente und Störungsdruck an einer inneren bewegten Grenzfläche, zu bestimmen sind. Für eine nichtisotherme Atmosphäre geringer vertikaler Erstreckung können die Koeffizienten der fraglichen Differentialgleichung in guter Annäherung als konstant angesehen werden, wodurch sich die Differentialgleichung durch  $e$ -Funktionen integrieren läßt. In einer unendlich flachen Zelle erhält man dann eine reine Vertikalschwingung mit einer Periode gleich der Laplacescher Schallwellen. Es wird sodann eine allgemeine, keine Einschränkungen bezüglich der Zelldimensionen enthaltende Periodenformel abgeleitet und tabuliert. — Alle diese Schwingungen können als zelluläre Schwingungen in nur sehr dünnen atmosphärischen Schichten stets in bezug auf die ganze Atmosphäre nur als Oberschwingungen sehr hoher Ordnung gedeutet werden; um die Grundschiwingung zu erfassen, muß die fragliche Differentialgleichung mit nicht konstanten Koeffizienten, in welche noch der konstante Temperaturgradient als Parameter eingeht, unter Beachtung der gleichen Randbedingungen integriert werden. Das allgemeine Integral besteht im wesentlichen aus einer linearen Kombination einer konfluenten hypergeometrischen Reihe und einer meromorphen Funktion, aus der sich unter Beachtung der Randbedingungen zunächst nur für die einfach geschichtete Atmosphäre eine Periodengleichung ergibt. Sie wird auf verschiedene Grenzfälle angewendet, in der sich die hypergeometrischen Reihen auf Besselsche Funktionen (reine Vertikalschwingungen, lange Wellen) reduzieren lassen oder durch die Barnessche asymptotische Darstellung ersetzt werden können (kurze Wellen). Dabei ergibt sich, daß sich die langen Wellen in einer adiabatischen Atmosphäre mit der Newtonschen Schallgeschwindigkeit am Boden (280 m/sec bei  $0^\circ\text{C}$ ) fortpflanzen, die mit wachsender Stabilität bei Isothermie schließlich in die Laplacesche Schallgeschwindigkeit am Erdboden (332 m/sec bei  $0^\circ\text{C}$ ) übergeht. Die unendlich kurzen Wellen pflanzen sich mit einer vom Temperaturentwurf völlig unabhängigen Geschwindigkeit fort, nämlich der der Stokesschen Oberflächenwellen in tiefem Wasser. Bei etwas größeren Wellenlängen ist die Abweichung von der Stokesschen Fortpflanzungsgeschwindigkeit am geringsten bei Isothermie ( $= 0$ ), am größten bei adiabatischem Gradienten. Verf. behandelt schließlich den allgemeinen Fall, in welchem die kurzen und die langen Wellen als Spezialfälle enthalten sind. Ein Diagramm läßt für Atmosphären verschiedenen thermischen Aufbaus und für alle Wellenlängen zwischen 0 und 100 km die zugehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten erkennen. Zum Schluß wird das gleiche Problem unter Hinzunahme der dritten Randbedingung für die zweifach geschichtete Atmosphäre behandelt, aber infolge fehlender Abschätzungsformeln für die konfluente hypergeometrische Reihe nur für die Spezialfälle, in welchen sie sich auf eine Besselfunktion oder auf die Barnessche Abschätzung zurückführen läßt. Die dabei gefundenen Resultate sind zum Teil denen der einfach geschichteten Atmosphäre ähnlich.

H. Philipps (Bad Homburg v. d. H.).

Siemon, K.: Die Ermittlung von Kartenentwürfen mit vorgegebener Flächenverzerrung. Deutsche Math. 1, 464—474 (1936).

Soll ein Kartenentwurf mit den kartesischen Koordinaten  $x$  und  $y$  eine Flächenvergrößerung  $V$  haben, die eine gegebene Funktion der geographischen Breite  $\varphi$  und Länge  $\lambda$  ist, so muß  $\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} = V \cos \varphi$  sein, wenn die Abplattung der Erde vernachlässigt wird. Aus dieser Bedingung sollen die Abbildungsgleichungen aller Entwürfe bestimmt werden. Soll die eine Abbildungsgleichung die Meridianbilder bedeuten, so muß sie die Form  $y = f(x, \lambda)$  haben. Wird mit einer Funktion  $W(x, \lambda)$  [Airysche Funktion]  $y = -\frac{\partial W}{\partial x}$  angesetzt, so folgt [aus der Bedingung für  $V$

$$V \cos \varphi = -\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \lambda} \right) = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial \lambda} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial \lambda}$$

und hieraus durch Integration] die andere Abbildungsgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} = \int V \cos \varphi d\varphi.$$



Soll die eine Abbildungsgleichung die Breitenkreisbilder bedeuten, so erhält man mit  $W(x, \varphi)$  aus dem Ansatz  $y = \frac{\partial W}{\partial x}$  die andere Abbildungsgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = \cos \varphi \int V d\lambda.$$

Hierin sind die flächentreuen Entwürfe als Spezialfall  $V = 1$  enthalten. [Bei der Funktion

$$W = -\frac{\sin \lambda}{2} (n\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$$

sind die Meridianbilder  $y = \frac{\sin \lambda}{2} \frac{1-nx}{\sqrt{1-x^2}}$  nicht Ellipsen, sondern Kurven 4. Grades.] Die

Quadratur  $\int V \cos \varphi d\varphi$  oder  $\int V d\lambda$  ist nicht nötig, wenn man bereits einen Entwurf  $x(\varphi, \lambda)$  und  $y(\varphi, \lambda)$  mit der gegebenen Flächenvergrößerung kennt. Dann ist jeder andere Entwurf  $X(\varphi, \lambda)$  und  $Y(\varphi, \lambda)$  mit derselben Flächenvergrößerung mit Hilfe zweier Funktionen  $W(x, X)$  und  $w(x)$  durch das Gleichungssystem

$$Y = -\frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial x} = k^2 y + w$$

bestimmt, worin ohne Spezialisierung  $k = 1$  und  $w = 0$  gesetzt werden kann. [D. A. Gravé, Sur la construction des cartes géographiques, nicht im 1., sondern 2. Bande des J. Math. pures appl. (5)]. Da die Funktion  $W$  willkürlich ist, kann eine Nebenbedingung vorgeschrieben werden, etwa die Meridian- oder Breitenkreisbilder. Alle Entwürfe mit der Flächenvergrößerung  $V$  und den Meridianbildern  $y = g(x, \lambda)$  sind durch das Gleichungssystem

$$y = g(x, \lambda) \quad \int V \cos \varphi d\varphi + \int \frac{\partial g}{\partial \lambda} dx = w(\lambda)$$

und alle Entwürfe mit der Flächenvergrößerung  $V$  und den Breitenkreisbildern  $x = g(y, \varphi)$  durch das Gleichungssystem

$$x = g(y, \varphi) \quad \cos \varphi \int V d\lambda + \int \frac{\partial g}{\partial \varphi} dy = w(\varphi)$$

bestimmt, worin die Funktionen  $w$  einer geographischen Koordinate noch willkürlich sind. Berechnet werden die Entwürfe mit den Meridianbildern  $\lambda^m y + kx^m = 0$  und die mit den Breitenkreisbildern  $\cos^2 \varphi = \cos^2 y + x^2 \sin^2 y$ ; beide enthalten den flächentreuen Zylinderentwurf von [Archimedes und] Lambert. Die Quadratur  $\int \frac{\partial g}{\partial \lambda} dx$  oder  $\int \frac{\partial g}{\partial \varphi} dy$  ist nicht nötig, wenn man bereits den flächentreuen Entwurf mit den vorgeschriebenen bezifferten Meridian- bzw. Breitenkreisbildern kennt. Man braucht dann nur in den Abbildungsfunktionen, die den flächentreuen Entwurf ergeben,  $\varphi$  durch  $\arcsin \int V \cos \varphi d\varphi$  bzw.  $\lambda$  durch  $\int V d\lambda$  ersetzen. Auf diese Weise werden aus dem Sansonnetz die Winkelschen Entwürfe gewonnen. [In den eckigen Klammern Anmerkungen des Referenten.] Ludwig.

**Möhle, A.:** Die Definition des „mittleren Punktfehlers“ und der „mittleren Fehlerellipse“. Z. Vermessgswes. 65, 593–603 (1936).

Auf wahrscheinlichkeitstheoretischer Grundlage wird eine Ableitung der mittleren Fehlerellipse als „Kurve der mittleren Fehler der Punktlage in den verschiedenen Richtungen“ gegeben. Die Achsen der neu definierten Fehlerellipse, die bereits von Andrae bei der Bearbeitung der dänischen Gradmessung benutzt worden ist, sind  $\sqrt{2}$ -mal so groß wie die Achsen der allgemein gebräuchlichen Fehlerellipse; die Achsenrichtungen sind für beide Ellipsen einander gleich. Der mittlere Punktfehler behält, wenn auch etwas anders als üblich definiert, nicht nur seine Bedeutung, sondern auch seinen Größenwert bei.

Schmehl (Berlin).

**Kneissl, Max:** Rückwärtseinschneiden nach Koordinaten mit Anwendung der Rechenmaschine. Z. Vermessgswes. 65, 665–667 (1936).